D. Hilbert y W. Ackermann

Elementos de lógica teórica

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

Garantía

EL LIBRO TECNICO
Tomás Morales, 44
Tef. 36 27 91
35003 - LAS PALMAS DE G.C.

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVÁN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia.*
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R, POPPER: *La lógica de la investigación científica* (2.ª ed.).
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDÉ: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIÈRE: *Limitaciones internas de los formalismos*
29. N. WIENER y J. P. SCHADÉ: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. VON WRIGHT: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. W. SELLARS: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. CHRISTIAN THIEL: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. CLAUDE FLAMENT: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. KNEALE: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. HUGHES y M. J. CRESSWELL: *Introducción a la lógica modal.*
40. KARL R. POPPER: *Conocimiento objetivo.*
41. GOTTLOB FREGE: *Escritos lógico-semánticos.*
42. STEPHEN C. KLEENE: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. KALINOWSKI: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. SMART: *Entre Ciencia y Filosofía.* Una introducción a la Filosofía de la Ciencia.

ELEMENTOS
DE LOGICA TEORICA

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

D. Hilbert y W. Ackermann

ELEMENTOS DE LOGICA TEORICA

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos de la versión castellana de la obra
GRUNDZÜGE DER THEORETISCHEN LOGIK
(6.ª edición)
editada por Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg
© by Springer - Verlag 1972
son propiedad de EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción de
VÍCTOR SÁNCHEZ DE ZAVALA

1.ª edición, 1962
Reimp., 1968
2.ª edición, 1975

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1975
O'Donnell, 27. Madrid (9)
ISBN 84-309-0581-2
Depósito legal. M. 20.252.—1975

Printed in Spain. Impreso en España por
Gráficas Halar, S. L.-Andrés de la Cuerda, 4.-Madrid.-1975
Impreso en papel offset editorial de Torras Hostench, S. A.

INDICE GENERAL

Págs.

PRÓLOGO DE LA CUARTA EDICIÓN ... 9

INTRODUCCIÓN ... 11

CAPÍTULO PRIMERO

EL CALCULO DE PROPOSICIONES

§ 1. Introducción a las conexiones lógicas fundamentales ... 13
§ 2. Las conexiones proposicionales como funciones veritativas ... 16
§ 3. Introducción de variables; formas proposicionales universalmente válidas ... 19
§ 4. Equivalencias; superfluidad de conexiones fundamentales ... 21
§ 5. Las formas normales conyuntiva y disyuntiva de las expresiones ... 25
§ 6. El principio de dualidad ... 28
§ 7. Multiplicidad de las formas proposicionales que pueden formarse con variables proposicionales dadas ... 30
§ 8. Cumplibilidad de una forma proposicional; consecuencias de axiomas dados ... 33
§ 9. Axiomática del cálculo de proposiciones ... 35
§ 10. El cálculo de proposiciones intuicionista ... 41
§ 11. El concepto de implicación estricta ... 48
Ejercicios ... 51

CAPÍTULO SEGUNDO

EL CALCULO DE CLASES

§ 1. Las conexiones de clases y las relaciones entre clases ... 55
§ 2. Las expresiones universalmente válidas del cálculo de clases. 59

Págs.

§ 3. Derivación sistemática de los silogismos aristotélicos tradicionales ... 70
Ejercicios ... 76

CAPÍTULO TERCERO

EL CALCULO RESTRINGIDO DE PREDICADOS

§ 1. Insuficiencia del cálculo estudiado hasta ahora ... 79
§ 2. Consideraciones metódicas fundamentales del cálculo de predicados ... 81
§ 3. Las expresiones y su validez universal ... 87
§ 4. Un sistema axiomático para las expresiones universalmente válidas ... 91
§ 5. Teoremas acerca del sistema axiomático ... 99
§ 6. La regla de sustitución; formación de la expresión contraria de una dada; el principio de dualidad ... 107
§ 7. La forma normal prenexuada; la forma normal de Skolem ... 110
§ 8. La compatibilidad, la independencia y la completitud del sistema axiomático ... 115
§ 9. El cálculo de predicados con inclusión de la identidad ... 121
§ 10. Axiomática de teorías científicas; el cálculo múltiple de predicados; sistemas axiomáticos de primero y de segundo grado. 129
§ 11. El problema de la decidibilidad ... 138
§ 12. El concepto de «aquel, el que»; introducción de funciones. 150
Ejercicios ... 156

CAPÍTULO CUARTO

EL CALCULO GENERALIZADO DE PREDICADOS

§ 1. Generalización del cálculo de predicados mediante adopción de cuantificadores para las variables predicado ... 161
§ 2. Introducción de predicados de predicados; tratamiento lógico del concepto de número ... 170
§ 3. Representación de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos en el cálculo generalizado ... 173
§ 4. Las paradojas lógicas ... 176
§ 5. El cálculo de niveles ... 183
§ 6. Aplicación del cálculo de niveles ... 195

BIBLIOGRAFÍA ... 205
INDICE DE AUTORES Y MATERIAS ... 211

PROLOGO A LA CUARTA EDICION

Para esta cuarta edición se ha refundido el texto a fondo. Aparte de pequeñas mejoras, cambios en el orden de presentación, etc., se han llevado a cabo las modificaciones que indicamos a continuación. En el cálculo de proposiciones se ha establecido toda la exposición apoyada en la fundamentación de la teoría de las expresiones universalmente válidas mediante las tablas veritativas, fundamentación que en la edición precedente se tocaba solamente de pasada; se ha adoptado ahora un sistema de axiomas más moderno para las expresiones universalmente válidas: a saber, un sistema del tipo gentzeniano, que permite a la vez la decisión sobre la validez universal; hemos introducido una sección sobre el cálculo intuicionista de proposiciones, y además otra sobre la «implicación estricta» —esta última fundamentalmente teniendo en cuenta al lector filosófico—. En el cálculo de clases hemos tratado más circunstanciadamente los procesos de decidibilidad; en esta sección empleamos los símbolos utilizados corrientemente en las matemáticas para representar las conexiones entre clases.

En el cálculo restringido de predicados adoptamos un sistema de axiomas consistente en una ampliación del utilizado en el cálculo de proposiciones; hemos entrado en la fundamentación axiomática del cálculo de predicados con inclusión de la identidad, así como se dedica una sección a la introducción de «aquel, el que» y de funciones. En el cálculo generalizado de predicados se verá que el sistema axiomático constituye una aplicación consecuente del planteamiento seguido ya en el cálculo restringido, que se refiere, por ejemplo, a la axiomática de multiplicidades y a la introducción de «aquel, el que»; comunicamos nuevos resultados acerca del cálculo de predicados generalizado mediante cuantificadores de predicados.

En contraste con las ediciones anteriores, se distingue rigurosamente a lo largo de la obra entre variables del cálculo en sentido propio, variables semánticas y variables sintácticas, aun cuando estos términos técnicos solamente aparecen en un lugar. Para corresponder al deseo de ciertos lectores he aumentado el número de ejemplos que, en el cálculo restringido de predicados, llevan a transcribir enunciados del lenguaje corriente en el lenguaje

formal. Hemos acompañado con ejercicios los capítulos I a III, mediante los cuales el lector podrá comprobar el estado de sus conocimientos.

Los lectores de las ediciones anteriores encontrará quizá algo incómodo el que haya variado los símbolos empleados para las conexiones proposicionales y para los cuantificadores; me he decidido a ello tras de maduras reflexiones, ya que el simbolismo hilbertiano hasta ahora utilizado tenía diversas desventajas. El signo «∼», que usábamos para indicar que dos proposiciones eran acordes, se usa en la mayoría de los trabajos angloamericanos como signo de negación. La raya de negación [1] *es ciertamente clara por sí misma, pero da lugar a dificultades tipográficas cuando hay que rayar varias veces largas partes de fórmulas. El signo universal «(x)», que emplean asimismo* WHITEHEAD y RUSSELL, *podía significar también el argumento de un predicado, y del mismo modo «(Ex)» podía haberse interpretado como la afección de x por un predicado «E». Por tanto, los anteriores signos «—», «&», «∼», «(x)» y «(Ex)» se han substituido, respectivamente, por «¯», «∧», «↔», «∀x», y «∃x», en donde hay que hacer observar que «¯», a diferencia de lo que ocurría con «—»* [1], *se coloca a la izquierda de la expresión que se niega. Me he adherido con ello a un simbolismo que, tal como aquí se presenta o en forma ligeramente diferente, se utiliza mucho en las publicaciones alemanas sobre lógica matemática.*

He podido utilizar para la preparación de esta edición una serie de sugerencias procedentes de ciertos lectores. Doy gracias de todo corazón a todos aquellos que me han apoyado de tal modo, y cuyos nombres no puedo citar aquí individualmente, así como a la Editorial Springer, que ha hecho posible de nuevo tan buena presentación de la obra.

Lüdenscheid, septiembre de 1958.

WILHELM ACKERMANN

---

[1] Esta raya se colocaba encima de los símbolos o conjunto de ellos a que afectaba la negación. *(N. del T.)*

INTRODUCCION

La *lógica teórica*, también llamada *lógica matemática* o *simbólica*, es una extensión del método formal de la matemática en el campo de la lógica: se aplica en ésta un lenguaje formal semejante al que está en uso desde hace largo tiempo en la expresión de las relaciones matemáticas. Hoy se consideraría una utopía cualquier intento de edificar una disciplina matemática utilizando únicamente el lenguaje usual. Los grandes progresos que se han llevado a cabo en las matemáticas desde la Antigüedad se han apoyado en parte, como en una condición esencial, en el hecho de que se ha logrado encontrar una formalismo utilizable y eficaz. Lo que se ha conseguido en las matemáticas gracias al lenguaje formal, es decir, un tratamiento exacto y científico de su objeto, debe conseguirse también gracias al mismo en la lógica teórica. Los hechos lógicos, que residen entre juicios, conceptos, etc., encuentran representación mediante fórmulas cuya interpretación está libre de la confusión que tiñe tan fácilmente la expresión lingüística. El paso a las consecuencias lógicas, tal como acontece en el proceso deductivo, queda desmembrado en sus últimos elementos y aparece como una reorganización de las fórmulas de partida de acuerdo con reglas determinadas, análogas a las reglas de cálculo del Algebra; el pensamiento lógico encuentra su propio trasunto en un *cálculo lógico*. Este cálculo hace posible que se ataquen con éxito problemas que por principio estaban vedados al puro pensamiento de contenidos; entre aquéllos se encuentran, por ejemplo, la cuestión acerca de cómo es posible caracterizar todos los enunciados que se pueden seguir de unas hipótesis dadas, o la cuestión sobre si es posible en general demostrar que un enunciado sea verdadero por razones puramente lógicas, y si puede hacerse siempre tal cosa. El cálculo lógico ha adquirido una importancia especial como consecuencia de haberse convertido en un instrumento ineludible de la investigación matemática fundamental; pero las aplicaciones de la lógica formalizada no se limitan a las matemáticas: puede utilizarse ventajosamente en las disciplinas axiomáticamente fundamentadas

y en aquellas otras —o partes de ellas— que son capaces de admitir una fundamentación axiomática.

LEIBNIZ fue el primero que concibió claramente la idea de una lógica matemática [1]. A. DE MORGAN (1806-1876) y G. BOOLE (1815-1864) obtuvieron los primeros resultados —el conjunto de su desarrollo posterior puede retrotraerse a BOOLE—; entre sus seguidores, W. S. JEVONS (1835-1882) y especialmente C. S. PEIRCE (1839-1914) enriquecieron la joven ciencia. Los diferentes resultados de sus predecesores fueron articulados sistemáticamente y completados por E. SCHRÖDER en sus lecciones sobre el «álgebra de la lógica» (1890-1895), que ofrecen cierta discrepancia con la línea de desarrollo procedente de BOOLE.

De un modo parcialmente independiente de la constitución del álgebra de Boole-Schröder, la lógica simbólica recibió nuevos impulsos gracias a la necesidad experimentada en las matemáticas de una fundamentación más exacta y de un tratamiento axiomático más riguroso: G. FREGE publicó su «Begriffschrift» [2] (1879) y sus «Grundgesetze der Arithmetik» [3] (1893-1903); G. PEANO y sus colaboradores comenzaron en 1894 la publicación del «Formulaire de Mathématiques», en el cual habrían de presentarse todas las disciplinas matemáticas bajo la forma de un cálculo lógico. La aparición de los «Principia Mathematica» (1910-1913), de A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL, constituyó una cima de este desarrollo. A partir de mil novecientos veintitantos, D. HILBERT ha empleado el cálculo lógico en una serie de opúsculos y de lecciones con objeto de llegar por un camino nuevo a una reconstrucción de la matemática que haga ver la no contradicción de los supuestos sobre las que aquélla se apoya. La obra de D. HILBERT y P. BERNAYS, «Grundlagen der Mathematik» [4], t. I (1934) y t. II (1939), resumía tales investigaciones en el estado en que entonces se encontraban. Luego se han comunicado una serie de resultados, algunos muy importantes, en el campo de la lógica matemática, que están ligados a diferentes autores; trataremos de algunos de aquéllos en la presente obra introductoria.

---

[1] Recuérdese, entre otras, la anticipación representada por las ideas de RAIMUNDO LULIO acerca de una lógica combinatoria. (*N. del T.*)

[2] La escritura conceptual (*o* La escritura ideográfica). (*N. del T.*)

[3] Leyes fundamentales de la aritmética. (*N. del T.*)

[4] Fundamentos de la matemática. (*N. del T.*)

CAPÍTULO I

EL CALCULO DE PROPOSICIONES

El llamado cálculo de proposiciones constituye una primera parte ineludible de la Lógica matemática. Ha de entenderse con el nombre de proposición una oración cualquiera de la cual tenga sentido afirmar que su contenido es verdadero o falso. Son proposiciones, por ejemplo: «la matemática es una ciencia», «la nieve es blanca», «9 es un número primo». En el cálculo de proposiciones no se entra en la estructura lógica más fina de las proposiciones —la que se manifiesta en la relación entre predicado y sujeto, entre otras—, sino que se consideran aquéllas, como un todo, en su conexión lógica con otras proposiciones.

§ 1. Introducción a las conexiones lógicas fundamentales

Las proposiciones pueden conectarse de ciertos modos determinados para formar nuevas proposiciones. Por ejemplo, a partir de las dos proposiciones «2 es menor que 3» y «la nieve es negra» se pueden construir las nuevas «2 es menor que 3 *y* la nieve es negra», «2 es menos que 3 *o* la nieve es negra», «*si* 2 es menor que 3, *entonces* la nieve es negra». Finalmente, basándose en «2 es menor que 3» es posible formar «2 *no* es menor que 3», que expresa lo contrario lógicamente a la primera proposición.

Estos enlaces o conexiones entre proposiciones se formulan lingüísticamente mediante las palabras «*y*», «*o*», «*no*» y «*si... entonces*».

Queremos ahora representar estas conexiones fundamentales de proposiciones mediante un simbolismo apropiado. En adelante utilizaremos «Φ», «Ψ», «Θ» y otras letras mayúsculas griegas como signos que substituyen a cualesquiera proposiciones concretas, como por ejemplo «la nieve es negra», «2 es menor que 3» y otras. Para representar las conexiones fundamentales mencionadas introducimos los siguientes signos:

1. «$\neg \Phi$» (léase «no Φ») designa el opuesto contradictorio de «Φ». Si «Φ» es una proposición verdadera, «$\neg \Phi$» es falsa; si «Φ» es falsa, «$\neg \Phi$»

es una proposición verdadera. En el caso de proposiciones «Φ» complicadas es recomendable escribir «$\neg(\Phi)$» en lugar de «$\neg\Phi$», con objeto de hacer patente qué es lo que queda afectado por la negación. Así, «$\neg$ (la nieve es blanca)» es una proposición falsa, mientras que «$\neg$ (la nieve es negra)» es verdadera. Llamamos a «$\neg\Phi$» la *negación* de «Φ».

2. Empleamos «$\Phi \wedge \Psi$» (léase «Φ y Ψ») como signo de una proposición que conocemos con el nombre de *conyunción* de «Φ» y «Ψ». Por tanto, «$\Phi \wedge \Psi$» es verdadera cuando y únicamente cuando tanto «Φ» como «Ψ» son verdaderas. También en este caso solemos colocar «Φ» y «Ψ» entre paréntesis. «(La nieve es blanca) $\wedge$ (7 es un número primo)» sería, por ejemplo, una proposición verdadera, y falsas «(la nieve es negra) $\wedge$ (7 es un número primo)», «(la nieve es blanca) $\wedge$ (9 es un número primo)» y «(la nieve es negra) $\wedge$ (9 es un número primo)». En el lenguaje ordinario la conyunción de proposiciones se expresa asimismo con «tanto... como» y de otros modos.

3. Designamos con «$\Phi \vee \Psi$» (léase «Φ o Ψ») una proposición a la que llamamos *disyunción* de «Φ» y «Ψ»; también se utiliza para este efecto el nombre de *alternación*. Para su interpretación es necesario observar que «o» se emplea en el lenguaje usual con un doble sentido. Cuando decimos: «un opositor de Matemáticas y de Física ha de estar especialmente impuesto en Matemáticas o ha de estar especialmente impuesto en Física», no pretendemos excluir que se pueda estar especialmente impuesto en ambas disciplinas a la vez; se utiliza aquí «o» en el sentido de la partícula latina «vel» («o también»). Pero si decimos: «tienes que trabajar para el examen o no aprobarás», queremos decir que estos dos casos se excluyen mutuamente; empleamos ahora «o» en el sentido que tiene en latín «aut...aut» («o...o»). Ahora bien, «$\vee$» tiene el sentido de «vel». Por tanto, «$\Phi \vee \Psi$» únicamente será verdadero cuando por lo menos sea verdadera una de las dos proposiciones «Φ» o «Ψ», así como cuando ambas lo sean, como es natural. En lo que se refiere al uso de los paréntesis, todo corresponde a lo explicado para «$\wedge$»; en consecuencia, serán verdaderas las siguientes proposiciones: «(2 es menor que 3) $\vee$ (7 es un número primo)», «(2 es menor que 3) $\vee$ (9 es un número primo)» y «(4 es menor que 3) $\vee$ (7 es un número primo)»; por el contrario, será falsa la proposición «(4 es menor que 3) $\vee$ (9 es un número primo)».

Más abajo mostraremos que también puede expresarse «o...o» mediante nuestros signos.

4. Indicamos con «$\Phi \rightarrow \Psi$» (léase «si Φ, entonces Ψ», o también «de Φ se sigue Ψ») una proposición cuyo nombre es el de *implicación* formada por «Φ» y «Ψ» (en este orden). Definiremos «$\Phi \rightarrow \Psi$» del modo siguiente: es verdadera cuando «Φ» es falsa, así como cuando «Ψ» es verdadera; por consiguiente sólo es falsa cuando, siendo «Φ» verdadera, «Ψ» es falsa. Con

ésto ha quedado fijado unívocamente el sentido de «→», y han de considerarse como verdaderas las siguientes proposiciones:

«(2 por 2 igual 4) → (la nieve es blanca)»,
«(2 por 2 igual 5) → (la nieve es blanca)» y
«(2 por 2 igual 5) → (la nieve es negra)».

En cambio, la proposición «(2 por 2 igual 4) → (la nieve es negra)» es falsa.

Ciertas objeciones filosóficas se refieren a la circunstancia de que «$\Phi \rightarrow \Psi$» se suelen trasladar ordinariamente al lenguaje por «de Φ se sigue Ψ» o también por «si Φ, entonces Ψ». Tal objeción encierra un núcleo justificado; pues en el lenguaje usual no se considerarían razonables el enunciado «de '2 por 2 igual 4' se sigue 'la nieve es blanca'» ni este otro: «si 2 por 2 es igual a 5, entonces la nieve es negra», puesto que entre ambas proposiciones no existe ninguna relación lógica. El «se sigue», así como el «si...entonces» del lenguaje corriente, tienen un sentido difícil de captar y escasamente unívoco; con todo, también decimos retóricamente —si bien utilizando partículas conjuntivas— «si 2 por 2 fuese igual a 5, entonces la nieve sería negra», por ejemplo. En el círculo de problemas en que aquí nos movemos, sin embargo, no necesitamos ocuparnos de este punto, puesto que «$\Phi \rightarrow \Psi$» tiene un sentido definido exactamente, al cual nos referimos de modo exclusivo cuando empleamos en este contexto el «si...entonces» [1]. Por lo demás, volveremos sobre este problema en el § 11 de este capítulo.

Como es natural, la relación «$\Phi \rightarrow \Psi$» tiene algo que ver con «de Φ se sigue Ψ» o «si Φ, entonces Ψ» en sentido filosófico, como quiera que sea este último. Podemos incluso decir que esta segunda relación es superflua en el marco de nuestra lógica de proposiciones, en la que nos ocupamos únicamente de enunciados verdaderos o falsos. Pues formamos proposiciones tales como «de Φ se sigue Ψ» sólo para poder concluir acerca de la verdad de «Ψ» en caso de que nos sea conocida la de «Φ». Si es que «de Φ se sigue Ψ» es verdadera, entonces (y cualquiera que sea la definición de «se sigue») no es posible que «Φ» sea verdadera y «Ψ» falsa; pues si mantenemos que «Φ» y «Ψ» han de ser ambas verdaderas o ambas falsas, también será en este caso verdadera «$\Phi \rightarrow \Psi$». La relación «$\Phi \rightarrow \Psi$» tiene de común con «de Φ se sigue Ψ» que, con cualquiera de las dos relaciones, de la verdad de «Φ» se deriva la de «Ψ».

5. Utilizamos «$\Phi \leftrightarrow \Psi$» (léase «$\Phi$ es acorde con Ψ») para designar una proposición que suele llamarse la *coimplicación* de «Φ» y «Ψ». Por tanto,

---

[1] Para evitar todo equívoco, la proposición «$\Phi \rightarrow \Psi$», como se lee «si Φ, entonces Ψ», se llama por algunos autores *condicional*, así como *bicondicional* la que se menciona en el punto 5 siguiente, que se lee «Φ si y sólo si Ψ». *(N. del T.)*

«$\Phi \leftrightarrow \Psi$» es verdadera cuando y sólo cuando «Φ» y «Ψ» tienen el mismo valor veritativo, es decir, cuando «Φ» y «Ψ» son ambas verdaderas o ambas falsas. En consecuencia, las dos proposiciones siguientes serán verdaderas: «(2 es menor que 3) $\leftrightarrow$ (7 es un número primo)» y «(4 es menor que 3) $\leftrightarrow$ (9 es un número primo)». Por el contrario, son falsas las dos proposiciones, «(2 es menor que 3) $\leftrightarrow$ (9 es un número primo)» y «(4 es menor que 3) $\leftrightarrow$ (7 es un número primo)».

Debido en primer lugar a que las simples conexiones descritas se emplean una detrás de otra de forma múltiple, surge una gran multiplicidad de conexiones entre proposiciones. En estas ocasiones ha de prestarse atención a que esté delimitado mediante paréntesis el campo afectado por cada conexión individual; de otra manera no sabríamos si «$\Phi \wedge \Psi \vee \Theta$» significa «$\Phi \wedge (\Psi \vee \Theta)$» o «$(\Phi \wedge \Psi) \vee \Theta$». Para no escribir excesivo número de paréntesis es recomendable introducir ciertas convenciones. Establecemos que tanto «$\wedge$» como «$\vee$» ligan más estrechamente que «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$»; de modo que, por ejemplo, «$\Phi \vee \Psi \rightarrow \Theta$» es lo mismo que «$(\Phi \vee \Psi) \rightarrow \Theta$», y no que «$\Phi \vee (\Psi \rightarrow \Theta)$»; no escribimos paréntesis que encuadren una sola letra; y, en caso de que tras «$\neg$» no se halle ningún paréntesis, la negación se referirá exclusivamente a la letra inmediatamente siguiente.

Mediante combinación de las conexiones fundamentales es factible expresar también el «*o...o*» excluyente: podemos representar «o Φ o Ψ» escribiendo «$\neg (\Phi \leftrightarrow \Psi)$». Pues esta última proposición es verdadera en el caso y solamente en el caso de que, de las dos componentes «Φ» y «Ψ», una sea verdadera y la otra falsa.

En lo que se refiere a la caracterización formal de las operaciones introducidas, hacemos observar que «$\neg$» es enteriza, mientras que todas las demás, «$\vee$», «$\wedge$», «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$» son bimembres. Combinando conexiones fundamentales se pueden representar operaciones multimembres, como por ejemplo las trimembres formadas por «$(\Phi \wedge \Psi) \wedge \Theta$» y «$\Phi \wedge (\Psi \leftrightarrow \Theta)$».

§ 2. Las conexiones proposicionales como funciones veritativas

De la definición de nuestras conexiones fundamentales se deriva que la verdad o falsedad de una proposición conectada depende solamente de la verdad o falsedad de las proposiciones elementales y no de su contenido además. Así, «$\neg \Phi$» es verdadera cuando «Φ» es falsa, y falsa cuando «Φ» es verdadera. Del mismo modo, «$\Phi \wedge \Psi$» es verdadera únicamente cuando tanto «Φ» como «Ψ» son verdaderas, y en todos los demás casos es falsa. En el caso de las otras conexiones fundamentales, así como en las conexiones proposicionales originadas por combinación de conexiones fundamentales, los hechos son análogos. Por ello podemos considerar las conexiones proposicionales como funciones que coordinan los valores «verdadero» o «falso» de las proposiciones

conectadas a uno de los dos valores «verdadero» o «falso»; las llamamos, en consecuencia, *funciones veritativas*.

Podemos expresar esta situación más claramente y de una manera más cómoda para las aplicaciones del modo siguiente: en lo sucesivo podrá utilizarse el signo «$\curlyvee$» (verum) en substitución de una proposición (cualquiera) verdadera, y el mismo signo invertido, o sea «$\curlywedge$», en lugar de una proposición (cualquiera) falsa. Nuestras conexiones fundamentales quedarán caracterizadas como funciones veritativas mediante los siguientes esquemas:

Φ	$\neg\Phi$
$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$

Φ	Ψ	$\Phi \wedge \Psi$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$

Φ	Ψ	$\Phi \vee \Psi$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$

Φ	Ψ	$\Phi \to \Psi$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$

Φ	Ψ	$\Phi \leftrightarrow \Psi$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$

Por combinación de estos esquemas obtenemos también un esquema para toda otra conexión proposicional que se forme a partir de las conexiones fundamentales. Damos a continuación uno de tales esquemas, o tabla de valores, para la función proposicional representada por «$((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)) \wedge (\Psi \vee \Theta)$»; se logra construir tal tabla fundándose en los esquemas anteriores: para ello se calculan sucesiva y ordenadamente los valores de las proposiciones «$\Phi \to \Psi$», «$\Psi \to \Theta$», «$(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)$», «$\Psi \vee \Theta$» y finalmente el de la proposición dada, para cada terna de valores de «Φ», «Ψ» y «Θ».

Φ	Ψ	Θ	$\Phi \to \Psi$	$\Psi \to \Theta$	$(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)$	$\Psi \vee \Theta$	$((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)) \wedge (\Psi \vee \Theta)$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$

Por tanto, la proposición «$((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)) \wedge (\Psi \vee \Theta)$» es verdadera cuando y solamente cuando se tiene para Φ, Ψ, Θ una cualquiera de las distribuciones $\curlyvee$, $\curlyvee$, $\curlyvee$; $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\curlyvee$; $\curlywedge$, $\curlywedge$, $\curlyvee$.

En la práctica pueden elegirse para estas evaluaciones cualesquiera otros signos en lugar de «$\curlyvee$» y «$\curlywedge$»: por ejemplo, «0» y «1», o «+» y «—».

Ocurre a veces que tenemos un enlace de proposiciones que conecta las proposiciones de carácter arbitrario o indeterminado $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, con otras determinadas cuya verdad o falsedad se conoce. Se puede pasar en tales casos

a una proposición más sencilla, construida solamente con las $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, que para cada combinación de valores de estas últimas posea el mismo valor veritativo que la proposición inicial; en un parágrafo posterior llamaremos a estas proposiciones, equivalentes en las $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Por ejemplo, «$\curlyvee \to \Phi$» equivale a «Φ»; pues si «Φ» tiene el valor «$\curlyvee$», tanto «$\curlyvee \to \Phi$» como «Φ» conservan el valor «$\curlyvee$», mientras que si es «$\curlywedge$» el valor de «Φ», tanto «$\curlyvee \to \Phi$» como «Φ» tienen el valor «$\curlywedge$»; en todo enlace de proposiciones puedo, pues, sustituir el segmento «$\curlyvee \to \Phi$» por «Φ» sin que varíe de ningún modo el valor que toma la proposición total. Existen relaciones análogas en el caso de las demás conexiones, como se indica en lo que sigue; se pueden sustituir las proposiciones en que aparezcan partes integrantes de valor veritativo conocido por otras más sencillas, mediante aplicación reiterada de la tabla de equivalencias que insertamos:

$\Phi \wedge \curlyvee$	Φ
$\curlyvee \wedge \Phi$	Φ
$\Phi \wedge \curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge \wedge \Phi$	$\curlywedge$
$\Phi \vee \curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee \vee \Phi$	$\curlyvee$
$\Phi \vee \curlywedge$	Φ
$\curlywedge \vee \Phi$	Φ

$\curlyvee \to \Phi$	Φ
$\curlywedge \to \Phi$	$\curlyvee$
$\Phi \to \curlyvee$	$\curlyvee$
$\Phi \to \curlywedge$	$\neg\, \Phi$
$\Phi \leftrightarrow \curlyvee$	Φ
$\curlyvee \leftrightarrow \Phi$	Φ
$\Phi \leftrightarrow \curlywedge$	$\neg\, \Phi$
$\curlywedge \leftrightarrow \Phi$	$\neg\, \Phi$

Por otra parte, si se introduce en esta tabla la de evaluación de «$\neg$», puede utilizarse para los mismos fines que las tablas de evaluación anteriores. Mostraremos que así ocurre en el caso de la evaluación de la conexión proposicional antes empleada como ejemplo, «$\big((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Theta)\big) \wedge (\Psi \vee \Theta)$».

a) Se sustituye Θ por $\curlywedge$. Con ayuda de la tabla, «$\big((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \curlywedge)\big) \wedge \curlywedge \wedge (\Psi \vee \curlywedge)$» se reduce a «$\big((\Phi \to \Psi) \wedge \neg\, \Psi\big) \wedge \Psi$».

aa) Al sustituir Ψ por $\curlywedge$, se reduce «$\big((\Phi \to \curlywedge) \wedge \neg\, \curlywedge\big) \wedge \curlywedge$» a «$\curlywedge$». *ab*) Si sustituimos Ψ por $\curlyvee$, se reduce «$\big((\Phi \to \curlyvee) \wedge \neg\, \curlyvee\big) \wedge \curlyvee$» a «$\curlywedge$».

b) Se sustituye Θ por $\curlyvee$. «$\big((\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \curlyvee)\big) \wedge (\Psi \vee \curlyvee)$» se reduce a «$\Phi \to \Psi$».

ba) Se sustituye Ψ por $\curlyvee$: «$\Phi \to \curlyvee$» se reduce a «$\curlyvee$». *bb*) Se sustituye Ψ por $\curlywedge$: «$\Phi \to \curlywedge$» se reduce a «$\neg\, \Phi$», que tiene solamente el valor «$\curlyvee$» cuando Φ posee el valor «$\curlywedge$».

De acuerdo con esto, el enlace proposicional que estudiamos se reduce a «$\curlyvee$» únicamente cuando Ψ y Θ (cualquiera que sea el valor de Φ) tienen ambas el valor «$\curlyvee$», o cuando los valores de Θ, Ψ y Φ son, respectivamente, «$\curlyvee$», «$\curlywedge$», y «$\curlywedge$», lo cual está de acuerdo con lo que habíamos obtenido antes.

§ 3. Introducción de variables; formas proposicionales universalmente válidas

Vamos a ampliar nuestro lenguaje simbólico con la introducción de *variables para proposiciones*. En realidad hemos empleado ya en varios contextos Φ, Ψ, etc., en sentido análogo a éste; pero se entendía que Φ, Ψ, Θ, ... eran abreviaciones de unos enunciados lingüísticos, aun cuando su contenido concreto hubiera quedado indeterminado en cada caso individual.

Tomamos como *variables proposicionales* las *letras mayúsculas latinas*, tales como *A*, *B*, *C*, etc., así como las mismas afectadas de subíndices A_1, B_2, etc. Definimos además el concepto «*expresión*» o «*forma proposicional*» [2] mediante las siguientes reglas:

1) Las variables proposicionales son expresiones.

2) Si «$\mathfrak{A}$» es una expresión, «$\neg\, \mathfrak{A}$» es también una expresión.

3) Si «$\mathfrak{A}$» y «$\mathfrak{B}$», son expresiones, también son expresiones «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» y «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$».

La utilización de los paréntesis para limitar el campo de las conexiones proposicionales individuales es igual a la que ya hemos visto para las conexiones proposicionales formadas con Φ, Ψ, ...; también se establecen del mismo modo las convenciones para evitar un número excesivo de paréntesis. Las reglas se toman en el sentido de que solamente es una expresión aquello que se obtiene como tal tras una aplicación finita de estas reglas. Por ejemplo: «$\neg\, ((A \rightarrow B) \wedge C)$» es una expresión, pues de acuerdo con 1) son expresiones *A* y *B*, según 3) $A \rightarrow B$ es una expresión, *C* es una expresión por 1), $(A \rightarrow B) \wedge C$ lo es por 3) y de acuerdo con 2), $\neg\, ((A \rightarrow B) \wedge C)$ lo es. Las *letras mayúsculas góticas*, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... significan cualesquiera expresiones; sirven en nuestro lenguaje como símbolos de expresiones.

Una expresión, como por ejemplo «$A \rightarrow A$», no representa por sí misma ninguna aserción que pudiera ser verdadera o falsa, sino únicamente una forma proposicional. Aquí ocurre exactamente lo mismo que en matemáticas, en que una igualdad entre variables recibe su sentido únicamente cuando incorporamos estipulaciones apropiadas sobre el significado de la misma, que, por lo demás, pueden variar de un caso a otro. En la mayoría de los casos, en la matemática se entiende una igualdad como identidad: es decir, debe ser válida para todos los números que se introduzcan en ella. Cuando traducimos el concepto de identidad conforme a su sentido hallamos el de «*expresión universalmente válida*» o de «*forma proposicional universalmente válida*».

---

[2] En lugar de «forma proposicional» suele emplearse «función proposicional». Los autores prefieren no emplear aquí la palabra «función», que utilizarán en un sentido estricto en el § 12 del Cap. III. *(N. del T.)*

Decimos que *a partir de una forma proposicional dada surge, por reemplazamiento, un enlace de proposiciones formado con las proposiciones* Φ, Ψ, Θ, ..., cuando ocurre lo siguiente: el enlace de proposiciones procede de la forma proposicional cuando cada variable proposicional se sustituye por una de las proposiciones arriba mencionadas, pero de tal modo que la misma variable proposicional se sustituya del mismo modo en todos los lugares en que aparezca. Así, a partir de la forma proposicional «$(A \to B) \wedge A$» se obtienen los enlaces proposicionales «$(\Phi \to \Psi) \wedge \Phi$» y «$(\Phi \to \Phi) \wedge \Phi$» por reemplazamiento. En adelante llamaremos a una expresión *universalmente válida* cuando cualquier enlace de proposiciones que se obtenga por reemplazamiento sea verdadero. De acuerdo con lo que hemos dicho en el § 2, para afirmar la validez general de una expresión basta tener en cuenta todos los casos posibles de sustitución de las variables proposicionales por «$\curlyvee$» o «$\curlywedge$»; en cada uno de ellos es posible llevar a cabo la evaluación con ayuda de las tablas de evaluación dadas en el § 2.

Ejemplos:

1) «$A \to A$» es válida universalmente.

La tabla de evaluación siguiente nos da «$\curlyvee$» para cualquier valor de A.

A	$A \to A$
$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlyvee$

2) «$A \wedge B \to (\neg A \to B)$» es válida universalmente.

He aquí la tabla de evaluación:

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg A \to B$	$A \wedge B \to (\neg A \to B)$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$

3) «$(A \to B) \vee \neg A$» no es válida universalmente.

La tabla de evaluación nos da:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$(A \to B) \vee \neg A$
$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlyvee$
$\curlyvee$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlywedge$
$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$
$\curlywedge$	$\curlywedge$	$\curlyvee$	$\curlyvee$	$\curlyvee$

Puesto que existe una distribución de los valores de A y B para la cual la expresión total toma el valor «$\curlywedge$», no hay validez universal.

En relación con lo expuesto podemos responder a la cuestión acerca de cuándo diremos de un enunciado que es verdadero por razones puramente lógicas, o dicho con mayor precisión, por razones puramente de lógica proposicional. Sin duda estaremos en tal caso cuando el enunciado se obtenga conectando determinadas proposiciones elementales $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ y la verdad de aquél sea independiente del contenido específico de las $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Podemos formular lo mismo también del siguiente modo: el enunciado procede, por reemplazamiento, de una expresión universalmente válida. Damos el nombre de *tautología* a un enunciado que sea verdadero por razones puramente de lógica proposicional. Tautologías son, por ejemplo, los enunciados siguientes: «$\Phi \rightarrow \Phi$», «$\Phi \vee \neg \Phi$» y «$\Phi \wedge (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow \Psi$», ya que las expresiones «$A \rightarrow A$», «$A \vee \neg A$» y «$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$» son válidas universalmente. También hay enunciados cuya falsedad procede de puras razones de lógica de proposiciones; llamaremos a cada uno de ellos una *contradicción*. Como la negación de una contradicción es una tautología, se obtiene una contradicción por reemplazamiento en una expresión cuya negación sea universalmente válida. Los enunciados de las formas «$\Phi \wedge \neg \Phi$» y «$(\Phi \wedge (\Phi \rightarrow \Psi)) \wedge \wedge \neg \Psi$» son contradicciones, ya que las expresiones «$\neg (A \wedge \neg A)$» y «$\neg ((A \wedge (A \rightarrow B)) \wedge \neg B)$» son universalmente válidas. Por otra parte, se utilizan también las palabras «tautología» y «contradicción» para las formas proposicionales correspondientes, de modo que se consideran, por ejemplo, «$A \rightarrow A$» como una tautología y «$A \wedge \neg A$» como una contradicción.

Teniendo en cuenta el modo cómo hemos establecido mediante evaluación la validez universal de una forma proposicional, se obtiene inmediatamente el siguiente teorema: sea $\mathfrak{A}$ una expresión de validez general; si en ella sustituimos cierta variable proposicional, en todos los lugares en que aparezca, por una expresión arbitraria $\mathfrak{B}$ (por ejemplo «$\neg A$», o bien «$A \rightarrow A$», o «$A \wedge C$)», la nueva forma proposicional $\mathfrak{C}$, que procede así de $\mathfrak{A}$, será también válida universalmente. Por ejemplo, de la forma proposicional universalmente válida «$A \rightarrow A$» procede la nueva «$(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$».

Hasta ahora hemos empleado letras en tres sentidos diferentes. Las variables proposicionales $A, B, C, \ldots$ aparecen sólo como partes de configuraciones formales, las formas proposicionales; con $\Phi, \Psi, \Theta, \ldots$ hemos señalado cualesquiera proposiciones auténticas, y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ han simbolizado formas proposicionales. Haremos notar solamente que se llaman también variables *semánticas* a $\Phi, \Psi, \Theta, \ldots$ y variables *sintácticas* a $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$

§ 4. Equivalencias; superfluidad de conexiones fundamentales

Se dirá que dos formas proposicionales «$\mathfrak{A}$» y «$\mathfrak{B}$» son *equivalentes* cuando «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$» sea universalmente válida. Si en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ [3] aparecen las

[3] En lo sucesivo no escribiremos en muchos casos las comillas que deberían encuadrar las expresiones.

variables proposicionales $A_1, \ldots, A_n$, ello significa que cualquiera que sea el valor de estas últimas, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen ambas el mismo valor veritativo. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes y se sustituye $\mathfrak{A}$ —en el interior de una forma proposicional $\mathfrak{C}$ en que aparezca— por $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pasa a una forma proposicional equivalente. Una forma proposicional, $\mathfrak{B}$, equivalente a una forma proposicional universalmente válida, $\mathfrak{A}$, es asimismo universalmente válida. Se dice que dos enlaces proposicionales, «Ψ» y «Ψ_1», son equivalentes cuando «$\Psi \leftrightarrow \Psi_1$» procede del reemplazamiento en una forma proposicional de validez universal.

En lugar de «$\mathfrak{A}$ es equivalente a $\mathfrak{B}$» escribiremos abreviadamente «$\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{B}$», sin que con esta simplificación de la escritura queramos introducir un nuevo símbolo lógico. El concepto de equivalencia tiene las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, como se deduce inmediatamente de su definición. Es decir, siempre $\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{A}$; en caso de «$\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{B}$», también «$\mathfrak{B}$ eq $\mathfrak{A}$», y cuando «$\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{B}$» y «$\mathfrak{B}$ eq $\mathfrak{C}$» asimismo se tiene que «$\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{C}$».

Damos a continuación una serie de equivalencias cuya demostración dejamos al lector.

$$«A» \text{ eq } «\neg\neg A» \tag{1}$$
$$«A \wedge B» \text{ eq } «B \wedge A» \tag{2}$$
$$«A \wedge (B \wedge C)» \text{ eq } «(A \wedge B) \wedge C» \tag{3}$$
$$«A \vee B» \text{ eq } «B \vee A» \tag{4}$$
$$«A \vee (B \vee C)» \text{ eq } «(A \vee B) \vee C» \tag{5}$$
$$«A \vee (B \wedge C)» \text{ eq } «(A \vee B) \wedge (A \vee C)» \tag{6}$$

De la definición de equivalencia apoyada en la validez general se deduce (compárese el penúltimo párrafo del § 3) que las equivalencias que acabamos de escribir, y cualesquiera otras, siguen subsistiendo cuando las variables proposicionales se sustituyen por formas proposicionales arbitrarias. Si, por ejemplo, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son formas proposicionales cualesquiera, según (2) también «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$» eq «$\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}$».

(1) nos dice que la doble negación es lo mismo que una afirmación. (2) a (6) ofrecen una ley *conmutativa* y *asociativa* para la *conyunción* y la *disyunción,* y una *ley distributiva.* Con lo cual se observa que a este respecto es posible calcular con los símbolos «$\wedge$» y «$\vee$» como con los símbolos «$+$» y «$\cdot$» en el álgebra: en las expresiones encerradas entre paréntesis se puede «efectuar el producto»; y, a la inversa, podemos «sacar factor común».

Pero, frente a lo que ocurre en el álgebra, existe una segunda ley distributiva, a saber:

$$«A \wedge (B \vee C)» \text{ eq } «(A \wedge B) \vee (A \wedge C)» \tag{7}$$

Por tanto, se puede calcular también con los «$\vee$» y «$\wedge$» como con los «$+$» y «$\cdot$» en el álgebra.

Gracias a la ley asociativa pueden escribirse sin paréntesis conyunciones o disyunciones multimembres. Para simplificar estas conexiones son esenciales las siguientes equivalencias:

$$«A \wedge A» \text{ eq } «A» \tag{8}$$
$$«A \vee A» \text{ eq } «A» \tag{9}$$

Tales leyes, que se llaman también de la *idempotencia* de la conyunción y de la disyunción, nos notifican que cuando en una conyunción o una disyunción un elemento aparece varias veces, basta escribirle una sola vez.

En lo que se refiere al enlace de la negación con la conyunción y con la disyunción, son fundamentales las relaciones siguientes:

$$«\neg (A \wedge B)» \text{ eq } «\neg A \vee \neg B», \tag{10}$$
$$«\neg (A \vee B)» \text{ eq } «\neg A \wedge \neg B» \tag{11}$$

Aún se dan otras equivalencias cuando hacemos intervenir los signos «→» y «↔»:

$$«A \to B» \text{ eq } «\neg (A \wedge \neg B)» \tag{12}$$
$$«A \to B» \text{ eq } «\neg A \vee B» \tag{13}$$
$$«A \vee B» \text{ eq } «\neg A \to B» \tag{14}$$
$$«A \to B» \text{ eq } «\neg B \to \neg A»\ ^{3\ bis} \tag{15}$$
$$«A \leftrightarrow B» \text{ eq } «(A \to B) \wedge (B \to A)» \tag{16}$$
$$«A \leftrightarrow B» \text{ eq } «B \leftrightarrow A» \tag{17}$$
$$«A \to B» \text{ eq } «\neg A \leftrightarrow \neg B» \tag{18}$$

Finalmente, en las relaciones entre la negación, la conyunción y la disyunción no pueden omitirse las siguientes equivalencias:

$$«A \vee B» \text{ eq } «\neg (\neg A \wedge \neg B)», \tag{19}$$
$$«A \wedge B» \text{ eq } «\neg (\neg A \vee \neg B)» \tag{20}$$

En todas estas equivalencias se muestra una multiplicidad en el modo de representar las conexiones proposicionales mediante los signos que hemos introducido; y se plantea uno la cuestión de si son superfluas algunas de las conexiones lógicas fundamentales. De hecho es así. Por lo pronto, a partir de (16) se manifiesta que el signo «↔» es evitable, puesto que con «∧» y «→» se le puede reemplazar. Lo mismo ocurre con «→» y «∨», pues según (12) y (19) bastan «∧» y «¬». Del mismo modo se obtiene, a partir de (13) y (20), que son suficientes «∨» y «$\dot{\neg}$». Análogamente resultan no ser necesarios más que «→» y «¬»: pues según (20) «∧» puede expresarse por lo pronto

---

[3 bis] Teniendo en cuenta esta equivalencia se llega fácilmente a la ley (expresión universalmente válida) «$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$», que procede de Aristóteles y recibió en la Escolástica el nombre de *modus tollens;* cf. pág. 27, 2), pág. 43, último párrafo, y pág. 48, lema. *(N. del T.)*

mediante «$\vee$» y «$\neg$», y teniendo en cuenta (14) «$\vee$» se expresa a su vez con «$\rightarrow$» y «$\neg$».

FREGE [4] [4] tomó como base la representación con «$\rightarrow$» y «$\neg$», mientras que WHITEHEAD y RUSSELL [20] emplearon «$\vee$» y «$\neg$» (aunque utilizaron otros símbolos). Lo más natural es, probablemente, partir de «$\wedge$» y «$\neg$», como ocurre en la teoría del juicio de BRENTANO. La utilización de los tres signos «$\wedge$», «$\vee$» y «$\neg$» es especialmente conveniente, ya que, en virtud de las equivalencias (2) a (6), se consigue hacer sumamente simple el manejo calculatorio de las expresiones lógicas.

Con «$\leftrightarrow$» y «$\neg$» no pueden representarse todas las conexiones: así, «$A \wedge B$» es intranscribible a base de aquellos signos. A base de las variables proposicionales A y B podemos formar en primer lugar las 8 formas proposicionales siguientes: A, B, $\neg A$, $\neg B$, $A \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow \neg A$, $A \leftrightarrow B$ y $A \leftrightarrow \neg B$. Si se construye la negación de éstas o se reúnen dos de ellas mediante «$\leftrightarrow$», se comprueba que se encuentran de nuevo solamente formas proposicionales equivalentes a una u otra de las ocho dadas. Puesto que las mismas «A» y «B» pertenecen al grupo de ocho, toda forma proposicional formada partiendo de A y B con los signos «$\leftrightarrow$» y «$\neg$» es equivalente a una de estas ocho. Pero se observa inmediatamente que «$A \wedge B$» no es equivalente a ninguna de estas formas proposicionales. Podría pensarse que únicamente se podría llegar a una forma proposicional equivalente a «$A \wedge B$» construida con «$\leftrightarrow$» y «$\neg$» si se utilizase además de A y B otra variable proposicional; pero en caso de que se diera tal forma proposicional, la equivalencia con «$A \wedge B$» debería conservarse al sustituir las variables proposicionales diferentes de A por ésta, con lo cual volvemos al caso anterior.

La negación es ineludible para la representación de las conexiones proposicionales; por ejemplo, sin «$\neg$» no se puede construir ninguna forma proposicional equivalente a «$\neg A$»: todas las establecidas a partir de A utilizando «$\wedge$», «$\vee$», «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$» reciben el valor «$\vee$» cuando A tiene el «$\vee$», mientras que en tal caso «$\neg A$» adquiere el valor «$\wedge$».

Es digno de observarse que la conexión [5] «$\vee$» puede expresarse exclusivamente con «$\rightarrow$», sin necesidad de emplear la negación; pues se tiene

$$«A \vee B» \text{ eq } «(A \rightarrow B) \rightarrow B» \tag{21}$$

No es posible representar análogamente «$A \wedge B$». Mencionaremos como curiosidad que es bastante una sola conexión lógica fundamental —una conexión nueva, por otra parte— en lugar de las anteriores, tal como ha mostrado

---

[4] Los números entre corchetes remiten a la Bibliografía del capítulo correspondiente.

[5] Es decir, «que toda conexión formada con el signo conectivo...». La misma aclaración debe entenderse más abajo. *(N. del T.)*

H. M. SHEFFER [19]. Este autor emplea únicamente la conexión fundamental «/», tal que «Φ/Ψ» significa: «Φ y Ψ no son ambas verdaderas», y por tanto lo mismo que «$\neg\Phi \vee \neg\Psi$». La tabla de evaluación para la función barra presenta el siguiente aspecto:

Φ	Ψ	Φ/Ψ
V	V	Λ
V	Λ	V
Λ	V	V
Λ	Λ	V

Así pues, «$\neg A$» eq «A/A»; además, se tiene que «$A \vee B$» eq «$(A/A)\,/\,/\,(B/B)$». Puesto que «$\vee$» y «$\neg$» pueden expresarse por medio del símbolo «barra» shefferiano, lo mismo ocurre con las restantes conexiones proposicionales. En lugar de representar la función proposicional definida por «$\neg A \vee \neg B$» mediante un símbolo especial, como hemos hecho, es posible adoptar con el mismo fin la función proposicional que está determinada por «$\neg A \wedge \neg B$» y expresar asimismo mediante ella todas las demás conexiones fundamentales.

Escribiremos dos equivalencias que son importantes para representar la relación de ser acorde:

$$«A \leftrightarrow B» \text{ eq } «(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)» \tag{22}$$

$$«A \leftrightarrow B» \text{ eq } «(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)» \tag{23}$$

§ 5. Las formas normales conyuntiva y disyuntiva de las expresiones

Las equivalencias establecidas en el § 4 nos enseñan que existe una multiplicidad de modos de representar enlaces con idéntico contenido entre proposiciones. Ahora bien, es de advertir que toda forma proposicional puede llevarse a cierta forma normal mediante transformación equivalente. Hay dos formas normales diferentes, la *forma normal conyuntiva* y la *disyuntiva.* Una expresión se encuentra en la forma normal conyuntiva cuando contiene únicamente los signos conectivos «$\vee$», «$\wedge$» y «$\neg$», cuando además ningún signo de negación afecta a ningún «$\neg$», «$\vee$» ni «$\wedge$», y finalmente cuando por añadidura el signo «$\vee$» no afecta a ningún «$\wedge$». Una expresión se encuentra en la forma normal disyuntiva cuando contiene exclusivamente los signos conectivos «$\vee$», «$\wedge$» y «$\neg$», y por otra parte ningún signo de negación afecta a ningún «$\neg$», «$\vee$» ni «$\wedge$», así como tampoco afecta ningún signo «$\wedge$» a ningún signo «$\vee$».

Para llevar una expresión $\mathfrak{A}$ a una forma normal conyuntiva equivalente la sometemos a la siguiente serie de transformaciones:

a *1*) Los símbolos «→» y «↔» que pudieran presentarse en $\mathfrak{A}$ se eliminan, para lo cual cualquier expresión parcial «$\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$» de $\mathfrak{A}$ se sustituye por «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$», y cualquiera «$\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$» por «$(\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \wedge (\neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$» [confróntense las equivalencias (13) y (22) del § 4]. Este proceso eliminador se lleva a cabo en cualquier orden y se prosigue hasta que hayan desaparecido los signos «→» y «↔».

a *2*) El signo de negación se lleva a un puesto especial, o sea lo más al interior que sea posible. De este modo, transformamos la expresión una y otra vez mientras aparezca en algún sitio el signo «$\neg$» afectando a una conyunción o a una disyunción, para lo cual sustituimos toda expresión parcial «$\neg (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})$» por «$\neg \mathfrak{B} \vee \neg \mathfrak{C}$», y toda «$\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$» por «$\neg \mathfrak{B} \wedge \neg \mathfrak{C}$» [cf. las equivalencias (10) y (11) del § 4].

a *3*) A consecuencia de la transformación a *2*), el signo de negación se encontrará, posiblemente de un modo múltiple, solamente ante variables proposicionales. Eliminamos ahora toda negación doble o múltiple: reemplazamos toda variable proposicional juntamente con un número par de signos de negación antepuestos a ella, por la variable sola; asimismo, en todos los casos en que una variable proposicional lleve antepuesto un número impar de signos de negación, sustituimos esta variable y tales signos por la misma variable negada simplemente; para ello utilizamos una o varias veces la equivalencia entre «$\neg \neg \mathfrak{B}$» y «$\mathfrak{B}$» [cf. la (1) del § 4].

a *4*) Tras la transformación a *3*) nos encontramos con una expresión que está formada exclusivamente a base de variables proposicionales negadas y no negadas, con ayuda de «$\wedge$» y «$\vee$». Vamos a ocuparnos de que el signo «$\vee$» no afecte al «$\wedge$». Con este fin sustituimos repetidamente toda expresión parcial «$\mathfrak{B} \vee (\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D})$» por «$(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \wedge (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{D})$», y toda «$(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}) \vee \mathfrak{B}$» por «$(\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{D} \vee \mathfrak{B})$» [cf. la equivalencia (6) del § 4]. Al terminar esta transformación hemos conseguido una forma conyuntiva normal de la expresión $\mathfrak{A}$.

Una forma normal conyuntiva está formada por una conyunción «$\mathfrak{C}_1 \wedge \wedge \mathfrak{C}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{C}_n$» (incluido el caso de $n = 1$), en la que cada miembro $\mathfrak{C}_i$ consiste en una disyunción (posiblemente multimembre) de variables proposicionales negadas o no negadas. En ella se encuentra incluido el caso de que $\mathfrak{C}_i$ conste únicamente de una variable proposicional —o de una variable proposicional negada.

Demos algunos ejemplos.

1) Ha de darse una forma conyuntiva normal de «$\neg(((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (C \wedge B))$».

a *2*) $\neg((A \vee B) \wedge \neg B) \wedge \neg (C \wedge B)$;
$(\neg (A \vee B) \vee \neg\neg B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$;
$((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$.

a *3*) $((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$.

a *4*) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$.

La última es una forma conyuntiva normal.

2) Una forma conyuntiva normal de «$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$».

a *1*) $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg\neg B \vee \neg A)$;

$((\neg (\neg A \vee B)) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)) \wedge ((\neg (\neg\neg B \vee \neg A)) \vee (\neg A \vee B))$.

a *2*) $((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)) \wedge$

$\wedge ((\neg\neg\neg B \wedge \neg\neg A) \vee (\neg A \vee B))$.

a *3*) $((A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \wedge A) \vee (\neg A \vee B))$.

a *4*) $(A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee B) \wedge$

$\wedge (A \vee \neg A \vee B)$.

Obsérvese que la forma proposicional en forma conyuntiva normal, equivalente a otra forma proposicional dada, no está unívocamente determinada, ya que existen varias formas proposicionales de aquel tipo. Así, no solamente es la expresión dada en el ejemplo *1*) una forma conyuntiva normal de la forma proposicional de que se partió en tal ejemplo, sino que también lo es «$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$».

En la forma conyuntiva normal de una expresión es posible comprobar si ésta es universalmente válida. *Una expresión en forma conyuntiva normal es universalmente válida cuando y sólo cuando en cada una de las disyunciones que comprende (que pueden ser multimembres) existen una variable y su negación como miembros de la disyunción.*

De acuerdo con ello, la expresión dada en el ejemplo 2) puede reconocerse como universalmente válida en su forma normal, ya que la primera disyunción contiene A y $\neg A$, la segunda B y $\neg B$, la tercera B y $\neg B$ y la cuarta A y $\neg A$. La expresión del ejemplo 1), por el contrario, no es universalmente válida, pues únicamente la segunda disyunción encierra B y $\neg B$.

Para probar este criterio observemos que es evidente que una conyunción de expresiones será universalmente válida, y sólo lo será, cuando cada expresión individual lo sea: pues de otro modo, alguna de estas expresiones recibirá en la evaluación el valor «Λ», y con ella la expresión total. Mas una disyunción en la que se encuentren como miembros de la misma una variable proposicional y su negación, toma en toda evaluación el valor «V», pues siempre han de tener, bien la variable misma, bien su negación, el valor «V». Por otro lado, para toda disyunción de variables negadas y no negadas en que no se encuentre la misma variable negada y no negada, existe siempre una evaluación en la que toma el valor «Λ»: basta para ello sustituir las variables proposicionales no negadas por «Λ» y las negadas por «V».

En la obtención de la *forma normal disyuntiva* de una expresión $\mathfrak{A}$, podemos, por lo pronto, llevar a cabo las transformaciones a *1*) a a *3*) del mis-

mo modo que cuando obteníamos la forma conyuntiva. Pero, en lugar de utilizar la transformación a *4*), hemos de llevar a cabo la siguiente, a *5*):

a *5*) Vamos a ocuparnos de que el signo «$\wedge$» no afecte en ninguna parte al signo «$\vee$». Con este objeto sustituimos repetidamente toda expresión parcial «$\mathfrak{B} \wedge (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D})$» por «$(\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{D})$», y toda «$(\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}) \wedge \mathfrak{B}$» por «$(\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{D} \wedge \mathfrak{B})$» [cf. la equivalencia (7) del § 4], con lo que obtenemos la forma normal disyuntiva.

Una forma normal disyuntiva está formada por una disyunción «$\mathfrak{C}_1 \vee \vee \mathfrak{C}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{C}_n$» (incluido el caso de que sea $n = 1$), en la que cada miembro $\mathfrak{C}_i$ es una conyunción de variables proposicionales negadas y no negadas. Queda incluido en el caso de que $\mathfrak{C}_i$ conste únicamente de una variable proposicional negada o no negada.

Vamos a utilizar como ejemplo la misma expresión que ya habíamos llevado a la forma conyuntiva normal en el ejemplo 1), con lo cual podemos utilizar las transformaciones ya realizadas según a *1*) a a *3*).

Como expresión equivalente de «$\neg((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (C \wedge B))$» llegamos, por a *1*) a a *3*), a «$((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B)$».

a *5*) $(((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \wedge \neg C) \vee (((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \wedge \neg B)$; $(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B)$.

Tampoco es unívoca la forma disyuntiva normal. Por ejemplo: otra forma disyuntiva normal de la expresión que acabamos de transformar es «$(\neg A \wedge \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B)$».

A partir de la forma disyuntiva normal puede advertirse si una expresión es una contradicción. Pues esto ocurre siempre que todo miembro de la disyunción contiene una variable que se presenta tanto negada como no negada, y sólo en este caso.

Para demostrar este criterio consideremos que toda conyunción que contenga los dos miembros A y $\neg A$, o B y $\neg B$, etc., toma el valor «$\wedge$» en cualquier evaluación. En caso de que el criterio sea aplicable con resultado positivo, todos los miembros de la disyunción adquieren, cualquiera que sea la evaluación, el valor «$\wedge$», y con ellos la expresión total. Pero si existe un miembro de la disyunción en el que todas las variables se presentan como máximo una sola vez, bien sea negadas o no negadas, podemos dar una evaluación para la cual este miembro de la disyunción tomará el valor «$\vee$», y con él la expresión en conjunto: basta únicamente sustituir las variables proposicionales que aparezcan no negadas por «$\vee$» y las que se presenten negadas por «$\wedge$».

§ 6. El principio de dualidad

Sea una forma proposicional $\mathfrak{A}$ en la que solamente entren como signos conectivos «$\neg$», «$\wedge$» y «$\vee$». Entendemos por *forma proposicional dual de* $\mathfrak{A}$ aquélla en que se convierte $\mathfrak{A}$ cuando intercambiamos los signos «$\wedge$» y «$\vee$»,

mientras que no alteramos en nada el «$\neg$». Por ejemplo, a «$\neg ((A \wedge B) \vee \neg C)$» corresponde la expresión dual «$\neg ((A \vee B) \wedge \neg C)$». Probaremos ahora el siguiente teorema:

Si $\mathfrak{A}$ *es una forma proposicional formada únicamente con ayuda de* «$\neg$», «$\vee$» *y* «$\wedge$», *se obtiene una forma proposicional equivalente a* «$\neg \mathfrak{A}$» *cuando se pasa de* $\mathfrak{A}$ *a su forma proposicional dual, y en ésta se sustituye toda variable proposicional que no aparezca inmediatamente negada por esta misma variable negada, y toda variable proposicional negada por esta misma sin negar.*

Por ejemplo, a «$\neg ((A \wedge B) \vee \neg C)$» corresponde la expresión dual «$\neg ((A \vee B) \wedge \neg C)$». Por tanto, son equivalentes «$\neg\neg ((A \wedge B) \vee \neg C)$» y «$\neg ((\neg A \vee \neg B) \wedge C)$».

Sea $\mathfrak{A}_1$ la expresión que procede de $\mathfrak{A}$ del modo arriba mencionado. Hemos de probar que «$\neg \mathfrak{A}$» eq «$\mathfrak{A}_1$».

Llevamos a cabo la demostración por inducción, partiendo del número de signos conectivos que se presenten en $\mathfrak{A}$, para lo cual reducimos el caso con más signos al de menos signos.

Si este número es 0, $\mathfrak{A}$ tiene la forma «A» (donde en lugar de A puede encontrarse cualquier otra variable proposicional). El teorema afirma entonces que «$\neg A$» eq «$\neg A$» [6].

Supongamos que esté demostrado que el teorema se cumple en el caso de contener $\mathfrak{A}$ n signos o menos. Vamos a probar que entonces se cumple para $n + 1$ signos.

a) Supongamos que $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$ [7]. Entonces «$\neg(\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C})$» eq eq «$\neg \mathfrak{B} \vee \neg \mathfrak{C}$». Sean $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{C}_1$ las expresiones que corresponden a $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, respectivamente, como $\mathfrak{A}_1$ corresponde a $\mathfrak{A}$: entonces, por hipótesis, «$\neg \mathfrak{B}$» eq «$\mathfrak{B}_1$» y «$\neg \mathfrak{C}$» eq «$\mathfrak{C}_1$». Por tanto, «$\neg \mathfrak{B} \vee \neg \mathfrak{C}$» eq «$\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{C}_1$» y también «$\neg \mathfrak{A}$» eq «$\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{C}_1$». Pero $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{C}_1$ es $\mathfrak{A}_1$.

b) Supongamos que $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ [7]. Entonces «$\neg(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$» eq «$\neg \mathfrak{B} \wedge \neg \mathfrak{C}$», y también por hipótesis «$\neg(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$» eq «$\mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{C}_1$», o sea «$\neg \mathfrak{A}$» eq «$\mathfrak{A}_1$».

c) Supongamos que $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\neg \mathfrak{B}$ [7]. En tal caso «$\neg \mathfrak{B}$» eq eq «$\mathfrak{B}_1$», y también «$\neg\neg \mathfrak{B}$» eq «$\neg \mathfrak{B}_1$». Pero $\neg \mathfrak{B}_1$ es $\mathfrak{A}_1$.

Se deduce además el siguiente *Principio de dualidad: téngase que* «$\mathfrak{A}$» eq «$\mathfrak{B}$» (*en que* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *contengan sólo los signos conectivos* «$\neg$», «$\wedge$» *y* «$\vee$»); *sean* $\mathfrak{A}_2$ *y* $\mathfrak{B}_2$ *respectivamente las expresiones duales de* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$; *se tiene entonces asimismo:* «$\mathfrak{A}_2$» eq «$\mathfrak{B}_2$». Demostración: a partir de que «$\mathfrak{A}$» eq

---

[6] Luego se cumple para este número de signos. (*N del T.*)

[7] En que tanto $\mathfrak{B}$ como $\mathfrak{C}$ contengan como máximo n signos conectivos, y $\mathfrak{A}$, $n+1$ (es evidente que la suma de los signos conectivos de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ ha de ser n). (*N. del T.*)

eq «$\mathfrak{B}$» se deduce que «$\neg\, \mathfrak{A}$» eq «$\neg\, \mathfrak{B}$»; si $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{B}_1$ tienen el mismo significado que en el teorema anterior, se deduce de éste que «$\mathfrak{A}_1$» eq «$\mathfrak{B}_1$»; sustituyamos en ambos miembros de esta equivalencia las variables proposicionales por sus negaciones, y luego las variables negadas dos veces por las mismas sin negar: ésto nos lleva directamente a «$\mathfrak{A}_2$» eq «$\mathfrak{B}_2$».

Recordemos como ejemplo la equivalencia (6) del § 4: «$A \vee (B \wedge C)$» eq «$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$», a la que habíamos llamado la primera ley distributiva. Según el principio de dualidad tenemos: «$A \wedge (B \vee C)$» eq «$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$», que es la equivalencia (7) del § 4, que denominábamos segunda ley distributiva. Análogamente se obtiene, a partir de «$(A \wedge \neg\, A) \vee B$» eq eq «$B$», la nueva equivalencia: «$(A \vee \neg\, A) \wedge B$» eq «$B$».

§ 7. Multiplicidad de las formas proposicionales que pueden formarse con variables proposicionales dadas

Otra observación importante se refiere a la multiplicidad de formas proposicionales que pueden formarse con variables proposicionales dadas. Deben considerarse diferentes únicamente las formas proposicionales que no sean equivalentes; bajo este supuesto, la multiplicidad mencionada consta de un número finito de formas proposicionales.

Dos formas proposicionales formadas con las variables proposicionales $A_1, \ldots, A_n$ son equivalentes si toman el mismo valor veritativo para cualquier evaluación arbitraria de las $A_1, \ldots, A_n$, y sólo en este caso. Contamos con 2^n posibilidades de distribución de «$\vee$» y «$\wedge$» entre estas n variables [8]; para cada una de estas 2^n posibilidades la forma proposicional puede darnos de nuevo el valor «$\vee$» o el valor «$\wedge$»; por tanto existen exactamente $2^{(2^n)}$ formas proposicionales no equivalentes que pueden formarse con $A_1, \ldots, A_n$.

Las 4 formas proposicionales no equivalentes construidas exclusivamente con A son: $A, \neg\, A, A \vee \neg\, A$ y $A \wedge \neg\, A$, cada una de las cuales, naturalmente, puede darse en cualquier otra forma equivalente. Las 16 formas proposicionales no equivalentes que pueden formarse con A y B son:

$A, B, A \wedge B, A \vee B, A \to B, B \to A, A \leftrightarrow B$ y $A \vee \neg\, A$, y las formas proposicionales equivalentes a las que se obtienen por negación: $\neg\, A, \neg\, B, \neg\, A \vee \neg\, B, \neg\, A \wedge \neg\, B, A \wedge \neg\, B, B \wedge \neg\, A, A \leftrightarrow \neg\, B$ y $A \wedge \neg\, A$. Entre las $2^{(2^n)}$ que es posible formar con $A_1, \ldots, A_n$, dos ocupan un puesto especial: la tautológica —que puede escribirse, por ejemplo, $A_1 \vee \neg\, A_1$— y la contradictoria —representable por $A_1 \wedge \neg\, A_1$.

El teorema siguiente proporciona una visión formal de conjunto de las formas proposicionales construidas con las $A_1, \ldots, A_n$: *Se toma la forma pro-*

---

[8] Naturalmente, 2^n es el número de variaciones con repetición de 2 elementos («$\vee$» y «$\wedge$») tomados de n en n. (*N. del T.*)

posicional «$(A_1 \wedge \neg A_1) \vee (A_2 \wedge \neg A_2) \vee \ldots \vee (A_n \wedge \neg A_n)$» *y se la lleva a la forma conyuntiva normal utilizando para ello la primera ley distributiva* [regla a *4*) del § 5]; *cada una de las conyunciones parciales* [9] *proporciona una de las posibles formas proposicionales.* La única excepción es la forma proposicional tautológica, que no aparece por este método —a no ser que se deba considerar como tal la conyunción parcial vacía.

Para demostrarlo nos basta indicar que toda forma proposicional, con excepción de la tautológica, se puede traducir en otra equivalente del tipo mencionado. Pasamos en primer lugar la forma proposicional de que se trate a la forma normal conyuntiva y despreciamos los miembros conyuntivos tautológicos; en caso de que en un miembro conyuntivo falten ciertas variables proposicionales, por ejemplo A_1, A_2, y A_3, lo ampliamos, para lo cual introducimos como otro miembro disyuntivo $(A_1 \wedge \neg A_1) \vee (A_2 \wedge \neg A_2) \vee (A_3 \wedge \neg A_3)$ y pasamos de nuevo a la forma normal conyuntiva [10]; finalmente sustituímos todos los miembros conyuntivos formalmente iguales o que sólo difieran en la ordenación de sus miembros disyuntivos por uno solo de ellos, y ya hemos obtenido la forma deseada. Por otra parte, las expresiones que se forman mediante desarrollo de la expresión anterior, «$(A_1 \wedge \neg A_1) \vee \ldots \vee (A_n \wedge \neg A_n)$», son en el número debido: pues existen 2^n miembros conyuntivos [11] y el número de posibilidades de elegir entre ellos un cierto número es precisamente $2^{(2^n)}$, si contamos la conyunción vacía [12].

Tomemos como ejemplo sencillo la expresión «$A \vee (B \wedge C)$». Una forma

---

[9] Que se pueden formar con miembros conyuntivos de la forma conyuntiva normal dicha... *(N. del T.)*

[10] Dicho miembro disyuntivo dará lugar a 2^3 miembros conyuntivos (2^f si le faltaban f variables) y quedará en definitiva una forma normal conyuntiva en *cada uno* de cuyos miembros conyuntivos aparecerán *todas* las variables proposicionales. *(N. del T.)*

[11] El desarrollo de la conyunción vacía (miembro disyuntivo vacío) unida disyuntivamente a los miembros mencionados, $(A_1 \wedge \neg A_1) \vee (A_2 \wedge \neg A_2) \vee \ldots \vee (A_n \wedge \neg A_n)$, conduce, en forma análoga al desarrollo de los miembros con f variables de menos a los que se añade la disyunción f-membre $(A_i \wedge \neg A_i) \vee (A_{i+1} \wedge \neg A_{i+1}) \vee \ldots \vee (A_{i+f-1} \wedge \neg A_{i+f-1})$ (confróntese la nota anterior), a 2^n miembros conyuntivos, en *cada uno* de los cuales aparecen *todas* las variables proposicionales; estos miembros, pues, tienen la misma estructura que los miembros conyuntivos de que consta la forma conyuntiva normal que acabamos de obtener a partir de una forma proposicional cualquiera. *(N. del T.)*

[12] Si ordenamos los 2^n miembros obtenidos y representamos por «+» la elección de uno de ellos para incluirle en una expresión que contenga cierto número de ellos unidos conyuntivamente, y por «—» el rechazo (la no inclusión en tal expresión), el número de expresiones distintas que podemos formar será el de variaciones con repetición de 2 elementos («+» y «—») tomados de 2^n en 2^n, o sea $2^{(2^n)}$. Pero éste es el número de expresiones distintas (no equivalentes) que se pueden formar con $A_1 \ldots A_n$ variables proposicionales, según se ha dicho al principio de este parágrafo; luego por el proceso indicado se obtienen *todas* estas expresiones. Como su estructura es igual (según la nota anterior) a la de la forma conyuntiva normal a que se llega como se ha dicho («completando» las variables que faltan) a partir de una expresión cualquiera, el teorema queda demostrado. *(N. del T.)*

normal conyuntiva de ella es «$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$»; introduciendo miembros disyuntivos se obtiene:

$$«(A \vee B \vee (C \wedge \neg C)) \wedge (A \vee C \vee (B \wedge \neg B))».$$

Reestableciendo la forma normal conyuntiva se llega a:

$$«(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee C \vee B) \wedge (A \vee C \vee \neg B)».$$

Tras eliminar el tercer miembro conyuntivo, que se diferencia del primero únicamente en el orden de sus miembros disyuntivos, obtenemos finalmente la forma «$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee C)$», en la cual hemos alterado el orden de sucesión de los miembros disyuntivos en el último miembro conyuntivo, por motivos de claridad.

La última forma proposicional se llama la *forma conyuntiva normal óptima* de «$A \vee (B \wedge C)$», y análogamente con otras expresiones. Esta forma es unívoca si no se tienen en cuenta las permutaciones en la sucesión de los miembros conyuntivos ni en la de las variables negadas o no negadas en las disyunciones. Mediante una regulación apropiada de las ordenaciones, tanto de las variables en las disyunciones como de los miembros conyuntivos, puede alcanzarse fácilmente una perfecta univocidad.

Existe también una *forma disyuntiva normal óptima* de toda expresión. Esta es una disyunción parcial de la expresión «$(A_1 \vee \neg A_1) \wedge \ldots \wedge (A_n \vee \neg \neg A_n)$» desarrollada en forma normal disyuntiva por medio de la segunda ley distributiva [regla a 5) del § 5]. Para llevar una expresión $\mathfrak{A}$ a la forma disyuntiva normal óptima se puede llevar a cabo un proceso dual del anterior; pero asimismo es posible operar del modo siguiente: se convierte «$\neg \mathfrak{A}$» en forma conyuntiva normal óptima y se aplica el primer teorema del § 6; según éste «$\neg \neg \mathfrak{A}$», o sea «$\mathfrak{A}$», es equivalente a una expresión $\mathfrak{B}$ que procede de la forma conyuntiva normal óptima de «$\neg \mathfrak{A}$» al intercambiar los signos «$\vee$» y «$\wedge$» así como las variables proposicionales negadas y no negadas. $\mathfrak{B}$ es la forma disyuntiva normal óptima de $\mathfrak{A}$.

A partir de la forma normal conyuntiva óptima de una expresión puede apreciarse si es posible representar la misma de modo equivalente sin utilizar el signo de negación [13]; si tal es el caso, la expresión adoptará el valor «$\vee$» cuando se sustituyan todas las variables proposicionales por «$\vee$»; en consecuencia, la forma conjuntiva óptima no ha de contener el miembro conyuntivo «$\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$», cuya ausencia es suficiente para que se pueda

---

[13] Se entiende que en tales representaciones se utilizan sólo los signos conectivos utilizados en esta obra, es decir, «$\vee$», «$\wedge$», «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$». *(N. del T.)*

tener tal representación. Cualquier otro miembro conyuntivo tiene, pues, o la forma «$A_1 \vee \ldots \vee A_n$», o una forma

$$«A_{p_1} \vee \ldots \vee A_{p_k} \vee \neg A_{q_1} \vee \ldots \vee \neg A_{q_l}»,$$

(vemos que «$A_{q_1} \wedge \ldots \wedge A_{q_l} \rightarrow A_{p_1} \vee \ldots \vee A_{p_k}$» es una representación de esta última sin signos de negación). Por tanto, es representable sin signos de negación exactamente la mitad de las $2^{(2^n)}$ expresiones que se pueden formar con las $A_1, \ldots, A_n$ [14].

§ 8. Cumplibilidad de una forma proposicional; consecuencias de axiomas dados

Hasta ahora hemos considerado las formas proposicionales únicamente desde el punto de vista de su validez. Un problema semejante es el de la *cumplibilidad.* Se llama cumplible a una expresión cuando existe en general alguna evaluación de las variables proposicionales para la cual toma el valor «$\vee$», lo cual puede comprobarse inmediatamente por el método de evaluación mencionado. Una expresión es cumplible cuando y sólo cuando no es ninguna contradicción, lo cual se puede dilucidar, además de por el método de evaluación, mediante inspección de la forma normal disyuntiva. *Sin duda, una expresión* «$\mathfrak{A}$» *es cumplible cuando y solamente cuando* «$\neg \mathfrak{A}$» *no es universalmente válida.*

Sea ahora un conjunto determinado de expresiones $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, que vamos a suponer válidas axiomáticamente. $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, estarán formadas por conexiones proposicionales, a partir de ciertas proposiciones elementales $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ no descomponibles ulteriormente. Preguntamos entonces en qué casos otra expresión cualquiera construida con $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ es una consecuencia lógico-proposicional de los axiomas. Debido a las dificultades que se encuentra en el concepto de la consecuencia lógica (véase § 1), vamos a precisarlo en el sentido de que una expresión Θ formada con las $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ será una consecuencia lógico-proposicional de los axiomas cuando, y sólo cuando, para toda evaluación de las $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ que proporcione para todos los axiomas el valor «$\vee$» también se obtenga el valor «$\vee$» para Θ. Esto quiere decir

---

[14] Hemos visto en el § 7 que con n variables proposicionales se pueden formar 2^n miembros conyuntivos distintos, con los cuales se construyen las formas conyuntivas normales óptimas de las expresiones formadas con aquellas variables. Hemos de excluir ahora el miembro $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$: luego quedan $2^n - 1$ miembros disponibles; éstos se pueden elegir, como vimos, de $2^{(2^n-1)}$ modos distintos, y por tanto el número de posibles formas conyuntivas normales óptimas de la forma pedida es $2^{(2^n-1)} = \frac{2^{2^n}}{2}$. (*N. del T.*)

que «$\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n \rightarrow \Theta$» será una tautología, es decir, se obtendrá mediante reemplazamiento en una forma proposicional universalmente válida.

Con objeto de conseguir una perspectiva general de todas las posibles consecuencias de los axiomas, podríamos formar todas las proposiciones que se pueden construir con $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ (existe sólo un número finito de ellas no equivalentes entre sí) y aplicar en cada caso el criterio que acabamos de enunciar. Pero hay otro camino.

Se enlazan todos los axiomas mediante «∧» y se halla la forma normal conyuntiva óptima en $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ de tal expresión. Escogiendo algunos de los miembros conyuntivos y enlazándolos con «∧» se llegan a obtener todas las consecuencias de los axiomas. Por este procedimiento faltarán únicamente las expresiones formadas a partir de $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ que sean tautológicas, las cuales, sin embargo, no nos interesan especialmente en este caso, ya que su validez es independiente de los axiomas.

La verdad de este teorema se deduce de que cada una de las expresiones dadas es evidentemente una consecuencia de los axiomas, como se patentiza por el método de evaluación. Por otro lado, mediante una evaluación apropiada podemos hacer que «$\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$» tenga el valor «V» (suponiendo que no sea un contradicción), y que un miembro conyuntivo de la forma normal conyuntiva óptima de «$(\Phi_1 \wedge \neg \Phi_1) \vee \ldots \vee (\Phi_k \wedge \neg \Phi_k)$» —que no sea un miembro conyuntivo de la forma conyuntiva normal óptima de «$\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$»— tome el valor «∧»; para ello necesitamos llevar a cabo la evaluación de $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ de tal modo que en el miembro conyuntivo mencionado —que es una disyunción— cada miembro disyuntivo adopte el valor «∧»: puesto que todo miembro conyuntivo de la forma normal conyuntiva óptima de «$\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$» se diferencia del miembro conyuntivo a que nos hemos referido en que, por lo menos en un sitio, en lugar del miembro disyuntivo «Φ_i» se halla «$\neg \Phi_i$» o a la inversa, cada uno de los miembros conyuntivos de este tipo tomará el valor «V», pues al menos uno de sus miembros disyuntivos estará evaluado con «V». Por tal razón, «$\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$» toma también el valor «V» en la evaluación aludida.

Detengámonos como ejemplo en los siguientes axiomas: $\Phi \wedge \Psi \rightarrow \neg \Theta$, Ψ y Θ. Las tres proposiciones elementales pueden tener el siguiente significado:

Φ: «la ley aditiva de las velocidades es verdadera»,

Ψ: «la luz se propaga en el sistema de las estrellas fijas con igual velocidad en todas direcciones»,

Θ: «la luz se propaga sobre la tierra con igual velocidad en todas direcciones».

El complejo de todos los axiomas, «$(\Phi \wedge \Psi \rightarrow \neg \Theta) \wedge \Psi \wedge \Theta$», se escribe en la forma normal conyuntiva así: «$(\neg \Phi \vee \neg \Psi \vee \neg \Theta) \wedge \Psi \wedge \Theta$»; la forma normal conyuntiva óptima es:

«$(\Phi \vee \Psi \vee \Theta) \wedge (\Phi \vee \Psi \vee \neg \Theta) \wedge (\Phi \vee \neg \Psi \vee \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \Psi \vee \Theta) \wedge$
$\wedge (\neg \Phi \vee \Psi \vee \neg \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \neg \Psi \vee \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \neg \Psi \vee \neg \Theta)$».

Una consecuencia es, por ejemplo:

«$(\neg \Phi \vee \Psi \vee \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \Psi \vee \neg \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \neg \Psi \vee \Theta) \wedge (\neg \Phi \vee \neg \Psi \vee \neg \Theta)$».

Para simplificar tales proposiciones puede utilizarse que «$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{A} \vee$
$\vee \neg \mathfrak{B})$» eq «$\mathfrak{A}$»; de acuerdo con ello se obtienen, en primer lugar, «$(\neg \Phi \vee$
$\vee \Psi) \wedge (\neg \Phi \vee \neg \Psi)$», y luego «$\neg \Phi$»: es decir, la ley de adición de las velocidades no es válida.

En lugar de preguntar por las consecuencias totales de unos axiomas dados, puede plantearse la cuestión inversa, la de qué hipótesis son necesarias para probar una proposición Ψ formada con las proposiciones elementales $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$. La solución es análoga a la anterior: se prepara la forma conyuntiva normal óptima de Ψ en las $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$; entre los miembros conyuntivos de la forma normal conyuntiva óptima de «$(\Phi_1 \wedge \neg \Phi_1) \vee \ldots \vee (\Phi_k \wedge$
$\wedge \neg \Phi_k)$» que no sean a la vez miembros conyuntivos de la forma conyuntiva normal óptima de Ψ, se eligen algunos y se los enlaza conyuntivamente con esta última forma conyuntiva normal óptima; se obtienen de tal modo todas las hipótesis posibles.

Otro problema que surge acerca de estas materias es el de si determinados axiomas, $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, del tipo mencionado están libres de contradicción, es decir, son compatibles. Tal cosa ocurre cuando «$\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$» no es una contradicción, y sólo en este caso.

§ 9. Axiomática del cálculo de proposiciones

De las observaciones precedentes se deduce que casi todos los problemas del cálculo de proposiciones se reducen a la cuestión de si ciertas formas proposicionales son universalmente válidas o no. Vamos a establecer un *sistema axiomático* para las formas proposicionales universalmente válidas: es decir, efectuaremos cierta selección entre estas fórmulas, y llamaremos a las elegidas *fórmulas elementales* o *axiomas;* de ellas se deducirán las demás formas proposicionales universalmente válidas de acuerdo con ciertas reglas. Estas últimas consisten en un operar enteramente formal con los signos lógicos, con total independencia de su significado. En una axiomática de cualquier otro campo científico, se llegaría por lo general a los demás enunciados a partir de los axiomas mediante un proceso de deducción de contenido lógico; el hecho de que tal proceso se encuentre ahora sustituido por unas reglas puramente formales se debe a que el objeto de estudio es precisamente el modo lógico de deducción.

Por otro lado, el conjunto de axiomas no desempeña aquí el papel que —por ejemplo— en otras partes de este libro en lo que respecta a obtener formas proposicionales universalmente válidas, ya que no vamos a precisar los axiomas para llegar a expresiones de validez universal; pues, con ayuda del método de evaluación por ejemplo, podemos comprobar de toda expresión si es universalmente válida o no. A pesar de ello, un sistema de axiomas para las formas proposicionales universalmente válidas tiene cierto interés sistemático.

La elección de las fórmulas elementales del sistema axiomático y de las reglas de deducción de nuevas fórmulas es en gran medida arbitraria: no existe una solución unívoca. De todas maneras plantearemos ciertas exigencias a las fórmulas elementales y a las reglas de deducción, tales como que no sean demasiado complicadas y que tengamos el menor número posible de axiomas y de reglas. A este respecto hemos de decir lo siguiente: hemos visto que no necesitamos partir de todas las conexiones proposicionales, de modo que podemos definir todas las demás conexiones basándonos, por ejemplo, en «$\overline{\ }$» y «$\wedge$», en «$\overline{\ }$» y «$\vee$», o en «$\overline{\ }$» y «$\rightarrow$», o incluso sólo en la función barra shefferiana; es de esperar que haya sistemas de axiomas que introduzcan para el cálculo, por ejemplo, únicamente «$\overline{\ }$» y «$\rightarrow$», etc. Cabalmente existe un sistema de axiomas solamente con «$\rightarrow$» y «$\overline{\ }$», que procede de G. FREGE [4]; J. LUKASIEWICZ y A. TARSKI [16] dieron otro del mismo tipo pero más sencillo. A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL [21] crearon un sistema de axiomas basado en «$\vee$» y «$\overline{\ }$», que ha sido simplificado por P. BERNAYS [2]. D. HILBERT y P. BERNAYS [10] han publicado un sistema de axiomas en el que se introducen desde el comienzo todas las conexiones elementales. J. G. P. NICOD [17] estableció uno basado en la función barra de SHEFFER. Puede consultarse un trabajo de J. SLUPECKI [20] acerca de las relaciones entre los distintos sistemas axiomáticos, de los cuales hemos mencionado únicamente algunos ejemplos.

Cuando se intenta establecer un sistema de axiomas que sea conveniente para nuestros fines es menester colocarse en un punto de vista especial. Si se nos da un sistema axiomático cualquiera del cual sepamos o sospechemos, por las razones que fueren, que da origen a todas las expresiones universalmente válidas, con frecuencia es muy dificultosa y requiere muchos tanteos la deducción de una determinada expresión de la cual sabemos, por ejemplo, que tiene validez general. Vamos a exigir, pues, al sistema de axiomas, que esté construido de modo que sea inmediatamente visible el proceso de deducción de todas las fórmulas universalmente válidas, y que, en general, partiendo de las reglas se sepa inmediatamente de toda forma proposicional si es deductible en el sistema o no; obsérvese de paso que de este modo se tiene un criterio más para juzgar de la validez universal de las formas proposicionales. G. GENTZEN [7] ha establecido un sistema que satisface estas exigencias for-

males, y en él se introducen además desde el principio todas las conexiones fundamentales. Otro sistema del mismo tipo, pero basado únicamente en las conexiones formadas con «$\neg$» y «$\vee$», es el que creó K. SCHÜTTE [18]. El que ofrecemos a continuación es una modificación del sistema de SCHÜTTE.

Escribiremos en lo que sigue las disyunciones multimembres siempre sin paréntesis, de modo que no emplearemos, por ejemplo, las combinaciones de signos «$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$» o «$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$». Es una expresión únicamente aquéllo que demuestra ser tal tras una aplicación finita de las reglas siguientes:

1. Las variables proposicionales son expresiones.

2. Si «$\mathfrak{A}$» es una expresión, «$\neg(\mathfrak{A})$» es asimismo una expresión (no emplearemos paréntesis tras «$\neg$» en caso de que la expresión que iría entre ellos sea una variable proposicional o la negación de una expresión).

3. Si «$\mathfrak{A}$» y «$\mathfrak{B}$» son expresiones, también lo es «$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$».

Adoptamos como *fórmulas elementales* todas las fórmulas que consistan en una disyunción «$\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» — en la que $\mathfrak{A}_i$ sea una variable proposicional, o una variable proposicional negada, y en la que cierta variable proposicional aparezca dos veces como miembro disyuntivo, una vez negada y otra no negada.

Además tenemos las dos *reglas de deducción* que escribimos más abajo:

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg\neg(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{N}} \qquad \text{(a)}$$

La raya indica que cuando se llega a una expresión cualquiera de la forma que se encuentra sobre la raya —la *fórmula superior* o premisa de la deducción—, se puede pasar asimismo a la fórmula que se encuentra debajo de la raya —la *fórmula inferior* o conclusión de la deducción—; ha de entenderse la regla en el sentido de que pueden faltar las fórmulas $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ (ambas o una de las dos). $\mathfrak{N}$, en caso de existir, ha de ser una variable proposicional, o una variable proposicional negada, o una disyunción cuyos miembros sean variables proposicionales negadas o no negadas. [Observación: esta limitación concerniente a $\mathfrak{N}$, así como la correspondiente de la regla (b), no es por sí misma necesaria, pues aún sin ella la deducción sería válida; la hemos impuesto con objeto de lograr cierta normalización de los procesos deductivos].

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{N} \qquad \mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}} \qquad \text{(b)}$$

Esta deducción tiene dos fórmulas superiores o premisas. Como en (a), $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ pueden faltar; en lo que se refiere a $\mathfrak{N}$ se tiene la misma limitación que en la regla (a); $\mathfrak{B}$ no ha de ser una disyunción.

Del método de evaluación se sigue inmediatamente que el sistema de axiomas proporciona únicamente fórmulas universalmente válidas; pues las fór-

mulas elementales son universalmente válidas, y si en (a) la fórmula superior y en (b) las dos fórmulas superiores son universalmente válidas, la fórmula inferior es asimismo universalmente válida. Daremos como ejemplo ahora la deducción de la forma proposicional «$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(C \vee A) \vee C \vee B$».

$A \vee \neg C \vee C \vee B$ (fórmula elemental); (1)

$\neg\neg A \vee \neg C \vee C \vee B$ [a partir de (1) teniendo en cuenta (a)]; (2)

$\neg B \vee \neg C \vee C \vee B$ (fórmula elemental); (3)

$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C \vee C \vee B$ [a partir de (2) y (3) teniendo en cuenta (b)]; (4)

$A \vee \neg A \vee C \vee B$ (fórmula elemental); (5)

$\neg\neg A \vee \neg A \vee C \vee B$ [a partir de (5) teniendo en cuenta (a)]; (6)

$\neg B \vee \neg A \vee C \vee B$ (fórmula elemental); (7)

$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee C \vee B$ [a partir de (6) y (7) teniendo en cuenta (b)]; (8)

$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(C \vee A) \vee C \vee B$ [a partir de (4) y (8) teniendo en cuenta (b)]. (9)

Podemos afirmar de toda expresión $\mathfrak{A}$ si es deductible o no del sistema de axiomas, y en el primer caso podemos mostrar el proceso deductivo. Demostraremos esta aserción cuando recae sobre una expresión determinada $\mathfrak{A}$, retrotrayéndola a la aserción correspondiente que verse sobre un número finito de expresiones (como máximo dos) en cada uno de los cuales el número total de signos «$\vee$» y «$\neg$» sea menor que en $\mathfrak{A}$.

1. Una expresión que no contiene «$\vee$» ni «$\neg$» es una variable proposicional. No es ninguna fórmula elemental ni puede ser ninguna fórmula inferior de (a) o (b). Por tanto no puede deducirse.

2. Sea $\mathfrak{A}$ una expresión con n signos conectivos ($n \geqq 1$), y supongamos que se conoce el modo de proceder con menos signos conectivos. Supongamos primeramente que sea $\mathfrak{A}$ una variable proposicional negada o una disyunción de variables proposicionales negadas y no negadas; mediante mera inspección puede comprobarse si $\mathfrak{A}$ es una fórmula elemental, en cuyo caso es deductible; en caso de que no sea una fórmula elemental tampoco puede ser una fórmula inferior de (a) ni de (b), y por tanto no será deductible. Si $\mathfrak{A}$ no tiene la forma que hemos mencionado habrá de poseer la forma $\mathfrak{M} \vee \neg\neg\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ o la $\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \vee \mathfrak{N}$, en las que $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{C}$ están sujetas a las mismas condiciones especificadas en (a) y (b), y son tales que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ (que pueden faltar) así como $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ están determinadas unívocamente. En el primer caso la única fórmula superior que puede ocurrir es $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$, y en el segundo pueden darse las fórmulas superiores $\mathfrak{M} \vee \neg\mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg\mathfrak{C} \vee \mathfrak{N}$; puesto que todas estas fórmulas contienen menos signos conectivos que

$\mathfrak{A}$, sabemos ya el procedimiento a emplear con ellas; si la fórmula superior o las fórmulas superiores no son deductibles tampoco lo será $\mathfrak{A}$; pero si la fórmula superior o las fórmulas superiores son deductibles, por hipótesis será posible dar el proceso de deducción de las mismas, el cual, con ayuda de (a) o de (b), puede completarse para obtener el proceso deductivo de $\mathfrak{A}$.

El procedimiento reside, pues, en que pasamos de la expresión problemática a las fórmulas superiores, unívocamente determinadas según (a) o (b), de éstas a las fórmulas superiores de las mismas consideradas como fórmulas simples, etc., hasta llegar a unas fórmulas que no puedan ser ya inferiores de (a) o de (b). Estas fórmulas finales constarán, bien de una variable proposicional, bien de una variable proposicional negada o bien de una disyunción de variables proposicionables negadas o no negadas. Unicamente será deductible la expresión que se estudiaba cuando estas últimas fórmulas sean fórmulas elementales.

Con ello podemos también contestar afirmativamente la cuestión acerca de si el sistema de axiomas es *completo* en el sentido de si es posible deducir todas las expresiones universalmente válidas. Hemos de observar que si la fórmula inferior de (a) o de (b) es universalmente válida lo mismo ocurre con la fórmula superior (o con las fórmulas superiores, en su caso), ya que en (a) la fórmula inferior es equivalente a la superior, y en (b) la fórmula inferior es equivalente a la conyunción de las dos superiores. Por tanto, si una expresión es universalmente válida, también lo son las últimas fórmulas que aparecen en la cadena que se forma al retrotraerse repetidamente a las fórmulas superiores: lo cual quiere decir, empero, que han de ser fórmulas elementales, pues de otro modo es imposible que sean universalmente válidas fórmulas que consten únicamente, ya de una variable proposicional, ya de una variable proposicional negada o ya de una disyunción de variables proposicionales negadas o no negadas. En otras palabras, todas las fórmulas universalmente válidas son deductibles. Demos dos ejemplos.

1. Comprobaremos si «$A \to (B \to A \wedge B)$» es deductible (y por tanto universalmente válida), y en su caso daremos el proceso deductivo.

Puesto que ni «$\to$» ni «$\wedge$» son signos elementales utilizados por nosotros, habremos de entender que «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» es un modo abreviado de escribir «$\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$», y que «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$» lo es de «$\neg\, (\neg\, \mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{B})$». La fórmula que vamos a estudiar se escribe del modo siguiente sin abreviaciones: «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\, (\neg\, A \vee \neg\, B)$» (1). Las fórmulas superiores de (1) son: «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\neg\, A$» (2) y «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\neg\, B$» (3). La fórmula superior de (2) es «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee A$» y la de (3), «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee B$». Como estas últimas son fórmulas elementales, «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\, (\neg\, A \vee \neg\, B)$» es deductible. Si recorremos el camino que va de «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee \neg\, (\neg\, A \vee \vee \neg\, B)$» a «$\neg\, A \vee \neg\, B \vee A$» y «$\neg A \vee \neg\, B \vee B$» en sentido inverso obtenemos la deducción de nuestra fórmula.

2. Ha de comprobarse si «$\neg\neg\neg A \vee \neg\neg(\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$» (1) deductible.

«$\neg\neg\neg A \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C$» (2) es la fórmula superior de (1); «$\neg A \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C$» es la fórmula superior de (2); pero no es ninguna fórmula elemental, y por tanto la fórmula propuesta a la consideración no es deductible, y en consecuencia tampoco válida universalmente.

Hasta ahora hemos utilizado el sistema axiomático únicamente para la deducción de expresiones universalmente válidas; lo emplearemos ahora para extraer consecuencias de lógica proposicional de proposiciones determinadas. Sean $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ ciertas proposiciones que no sean descomponibles con los métodos del cálculo de proposiciones, es decir, que no estén formadas a partir de otras proposiciones con ayuda de las conexiones proposicionales. Utilizaremos exclusivamente las conexiones [formadas con (*T*.)] «$\vee$» y «$\neg$». Definimos en primer lugar el concepto de fórmula:

1. $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ son fórmulas.
2. Si Γ es una fórmula, también lo es $\neg(\Gamma)$.
3. Si Γ y Θ son fórmulas, también es $\Gamma \vee \Theta$ una fórmula.

Sea ahora $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ fórmulas del tipo indicado cuya validez se suponga axiomáticamente. Se trata de deducir las fórmulas formadas con las $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ que sean consecuencias lógico-proposicionales de los axiomas $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ —el concepto de consecuencia lógico-proposicional ha de entenderse en el sentido del § 8.

Tomamos como *fórmulas elementales* del sistema axiomático las fórmulas $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, así como las que consisten en una disyunción en la cual cada miembro es una Φ_i o una $\neg\Phi_i$ y en la que, además, aparece simultáneamente una y la misma Φ_p como miembro disyuntivo una vez como Φ_p y otra como $\neg\Phi_p$.

Tenemos como *reglas de deducción*, por lo pronto las que hemos llamado (a) y (b) en el sistema de axiomas arriba establecido, pero con la salvedad de que en la construcción de fórmulas toda variable proposicional ha de estar sustituida por una variable de la serie $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Pero con estas dos reglas no es suficiente: por ejemplo, partiendo de los axiomas Φ_1 y $\neg\Phi_1 \vee \Phi_2$ y utilizando únicamente las dos reglas mencionadas no se podría llegar como conclusión a Φ_2. Introducimos por ello además la siguiente regla:

$$\frac{\Gamma \qquad \neg(\Gamma) \vee \Theta}{\Theta} \qquad \text{(c)}$$

que se llama la *regla de separación* [15]. Con ayuda de estas tres reglas se es capaz de extraer todas las consecuencias de $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$.

---

[15] Este es (salvo que allí se empleaba la implicación en lugar de su equivalencia con los signos «$\neg$» y «$\wedge$») el razonamiento deductivo conocido por los estoicos y

Sea $\mathfrak{Z}$ una de tales consecuencias; según el § 8, $\neg \mathfrak{P}_1 \vee \neg \mathfrak{P}_2 \vee \ldots \vee \vee \neg \mathfrak{P}_n \vee \mathfrak{Z}$ es una tautología [16]. Ahora bien, en nuestro sistema todas las tautologías son, evidentemente, deductibles, y precisamente cuando no utilizamos las fórmulas elementales $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$, así como tampoco la regla (c) (como puede comprobarse comparando con el sistema de axiomas para las formas proposicionales universalmente válidas). A partir de la fórmula elemental $\mathfrak{P}_1$ y de la deducida $\neg \mathfrak{P}_1 \vee \neg \mathfrak{P}_2 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{P}_n \vee \mathfrak{Z}$, se obtiene de acuerdo con la regla (c): $\neg \mathfrak{P}_2 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{P}_n \vee \mathfrak{Z}$; de ésta y de $\mathfrak{P}_2$ se llega mediante (c) a la fórmula en la que falta el miembro disyuntivo $\neg \mathfrak{P}_2$, etc., hasta que finalmente de $\mathfrak{P}_n$ y $\neg \mathfrak{P}_n \vee \mathfrak{Z}$ se obtiene la fórmula $\mathfrak{Z}$.

Podríamos haber introducido la regla (c), en la forma correspondiente $\dfrac{\mathfrak{A} \quad \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$, en el sistema de axiomas para las fórmulas universalmente válidas; puesto que, ciertamente, con fórmulas superiores de validez universal da lugar a fórmulas inferiores asimismo de validez universal. Pero allí era sin duda superflua, puesto que también sin ella podían deducirse todas las fórmulas universalmente válidas.

* § 10. El cálculo de proposiciones intuicionista [17]

El cálculo de proposiciones desarrollado en los parágrafos precedentes descansaba en la hipótesis de que se habían de entender por proposiciones aquellos enunciados a los cuales fuese aplicable uno de los dos valores «verdadero» o «falso»; hablamos en consecuencia de un cálculo de proposiciones *bivalente*. Pero no nos hemos limitado en nuestras reflexiones a enunciados tales que su verdad o falsedad pueda comprobarse unívocamente, sino que hemos atribuido uno de estos valores a aquellos de los cuales —al menos por el momento— no podemos decidir cuál es el valor de que se trata. Mantendremos este punto de vista del cálculo bivalente de proposiciones en todo el libro, con excepción del presente parágrafo.

El *intuicionismo*, fundado en diversos artículos por L. E. I. BROUWER, y que recientemente ha sido expuesto en un resumen de su evolución por A. HEYTING, ve las cosas desde otro punto de vista. El intuicionismo, que

---

que, en forma de ley lógica, recibió en la Escolástica el nombre de *modus ponens*. *(N. del T.)*

[16] Al final del segundo párrafo del § 8 se ha escrito un condicional aplicable a un conjunto cualquiera de axiomas y toda consecuencia de ellos. Basta tener en cuenta sucesivamente cómo se «resuelven» las abreviaciones constituidas por el condicional y la conyunción (puede confrontarse el ejemplo 2 del presente parágrafo) para llegar a la fórmula dada. *(N. del T.)*

[17] Los §§ 10 y 11, marcados con «*», pueden omitirse en una primera lectura seguida.

por otra parte se limita a la teoría de los enunciados matemáticos, rechaza por principio la noción de que a todas las aserciones matemáticas haya de corresponder uno de los valores «verdadero» o «falso» —incluso a aquéllas cuya verdad o falsedad no se ha podido demostrar hasta el momento— porque en su opinión se oculta aquí el supuesto infundado de que sería posible resolver alguna vez todos los problemas matemáticos. Ahora bien, el intuicionismo necesita también conexiones proposicionales lógicas, con objeto de representar hechos complicados; pero falta la posibilidad de concebirlas como funciones veritativas. Transcribiremos también estas conexiones proposicionales mediante los signos «$\neg$», «$\vee$», «$\wedge$» y «$\rightarrow$», aun cuando su uso aquí no se corresponda enteramente con el de la lógica clásica (es decir, bivalente).

En lugar del concepto de verdad o falsedad de una proposición se maneja el concepto de *construcción* de una proposición. Decimos que una proposición está construida cuando puede probarse mediante razonamientos intuicionísticamente correctos. Decimos además que a partir de la proposición Φ puede construirse la proposición Ψ, cuando en el supuesto hipotético de que Φ esté construida se consiga construir también Ψ. No es necesario que el supuesto de la construcción de Φ sea esencial para la construcción de Ψ: decimos también que Ψ se puede construir a partir de Φ cuando puede construirse Ψ. Las conexiones proposiciones se caracterizan en particular del modo siguiente:

a) Sea «$\Phi \wedge \Psi$» una proposición a partir de la cual puedan construirse tanto Φ como Ψ. Si además pueden construirse Φ y Ψ, también «$\Phi \wedge \Psi$» será construible. La constructibilidad de «$\Phi \wedge \Psi$» equivale a decir, pues, que tanto Φ como Ψ se pueden construir.

b) Sea «$\Phi \vee \Psi$» una proposición que pueda construirse tanto a partir de Φ como a partir de Ψ; si además, a partir de Φ se puede construir una proposición Γ, y a partir de Ψ se puede construir también la proposición Γ, Γ será construible a partir de «$\Phi \vee \Psi$». La constructibilidad de «$\Phi \vee \Psi$» significa, por lo tanto, que por lo menos una de las dos proposiciones Φ o Ψ se puede construir.

c) La constructibilidad de «$\Phi \rightarrow \Psi$» quiere decir que la proposición Ψ puede construirse a partir de la proposición Φ. De aquí se sigue que a partir de Φ y «$\Phi \rightarrow \Psi$» se puede construir la proposición Ψ.

d) La constructibilidad de «$\neg \Phi$» significa que Φ puede construirse a partir de una contradicción. No se indica exactamente en qué consiste una contradicción. Para la Matemática basta presentar la fórmula $1 = 2$ como una contradicción, de modo que «$\neg \Phi$» significa lo mismo que «$\Phi \rightarrow 1 = 2$».

La caracterización que hemos hecho de las conexiones proposicionales no es completa, puesto que existen ciertos supuestos ligados al concepto de constructibilidad que no hemos mencionado: por ejemplo, el de que el concepto

de constructibilidad encierra en sí la transitividad —pues siempre se puede construir «$\Phi \to \Gamma$» a partir de «$\Phi \to \Psi$» y «$\Psi \to \Gamma$»—, el de que la constructibilidad de «$\Phi \to (\Psi \to \Gamma)$» significa lo mismo que la constructibilidad de «$\Phi \wedge \Psi \to \Gamma$», y otros varios. Además se encuentran diferencias en el interior del intuicionismo, según se admita o no que a partir de una contradicción se puede construir todo («ex falso quodlibet»). Si se supone el segundo término de la alternativa se distingue el *cálculo mínimo* de I. JOHANSSON [12] frente al cálculo intuicionista usual —el único que consideraremos aquí.

Antes de que comencemos a establecer más exactamente el procedimiento intuicionista de deducción queremos señalar algunas de las diferencias más importantes que le distinguen de la lógica proposicional bivalente. Indicaremos diversas formas proposicionales que son de validez universal en la lógica de proposiciones bivalente, pero no en la intuicionista; por el contrario, toda expresión universalmente válida desde un punto de vista intuicionista también será universalmente válida en la lógica clásica, pues todos los principios de construcción se vuelven a encontrar en esta lógica. «$A \vee \neg A$» es clásicamente de validez universal, mas no intuicionísticamente; pero no solamente tiene «$A \to \neg \neg A$» validez universal clásicamente, sino también intuicionísticamente, pues bajo la hipótesis de «A», evidentemente «$\neg A$» es contradictoria, es decir, «$\neg \neg A$» es válida; podemos escribir esta fórmula también de la forma siguiente: «$A \to ((A \to 1 = 2) \to 1 = 2)$», que se halla por sustitución en la forma proposicional universalmente válida desde el punto de vista intuicionista, «$A \to ((A \to B) \to B)$», que es equivalente a «$A \wedge (A \to \to B) \to B$» y por ello expresa únicamente que a partir de «A» y «$A \to B$» se puede concluir «B»; en cambio, «$\neg \neg A \to A$» en sentido intuicionista no es universalmente válida, aunque sí lo es tomada en sentido clásico: se trataría, como con «$A \vee \neg A$», de una forma del principio del tercio excluso, que intuicionísticamente no es de validez universal.

Una expresión que en sentido intuicionista es universalmente válida es «$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$», que también podemos escribir:

$$«(A \to B) \to ((B \to 1 = 2) \to (A \to 1 = 2))»,$$

y que se obtiene por sustitución en la expresión «$(A \to B) \to ((B \to C) \to \to (A \to C))$»: esta última tiene validez universal intuicionísticamente, puesto que en ella se expresa únicamente la transitividad de la relación «$\to$». Por el contrario, la fórmula clásica «$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$» no tiene validez universal considerada intuicionísticamente. Hemos dicho ya que «$\neg \neg A \to \to A$» no es universalmente válida tomada en sentido intuicionista; frente a esto, la forma proposicional «$\neg \neg \neg A \to \neg A$», que procede de ella por sustitución, es universalmente válida: puesto que «$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$» tiene validez universal, asimismo la tiene «$\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}$», que procede de la

fórmula «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$»; ahora bien, dado que «$A \to \neg\neg A$» es universalmente válida, lo mismo ocurre con «$\neg\neg\neg A \to \neg A$». Por tanto, la triple negación es equivalente intuicionísticamente a la simple, ya que también «$\neg A \to \neg\neg\neg A$» tiene validez universal.

Además, «$\neg A \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$» es también universalmente válida desde un punto de vista intuicionista. Debido a la validez universal de «$A \wedge B \to A$» y de «$A \wedge B \to B$», también son universalmente válidas las fórmulas «$\neg A \to \neg(A \wedge B)$» y «$\neg B \to \neg(A \wedge B)$»: a partir de lo que hemos dicho más arriba acerca del sentido del «$\vee$» intuicionista se ve que «$\neg A \vee \vee \neg B \to \neg(A \wedge B)$» tiene también validez universal; pero la inversión de la última fórmula, es decir, «$\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$», que es clásicamente de validez universal, no lo es intuicionísticamente; así, cuando «$\Phi \wedge \Psi$» es contradictoria, no es por ello posible demostrar que una de las dos proposiciones sea contradictoria; daremos un ejemplo sencillo: no cabe duda de que, para cualquier proposición Φ, «$\Phi \wedge \neg \Phi$» es contradictoria; pero con ello no se quiere decir que «$\neg \Phi \vee \neg\neg \Phi$» sea verdadera, pues tal cosa ocurriría únicamente si fuese posible construir o la proposición «$\neg \Phi$» o la «$\neg\neg \Phi$», lo cual no se puede afirmar en general.

Como hemos visto, «$A \vee \neg A$» no es intuicionísticamente de validez universal, pero sí lo es su doble negación, es decir: «$\neg\neg(A \vee \neg A)$». Para mostrar tal resultado obsérvese que tanto «$A \to A \vee B$» como «$B \to A \vee B$» son universalmente válidas; de aquí se sigue la validez universal de «$\neg(A \vee \vee B) \to \neg A$» y de «$\neg(A \vee B) \to \neg B$», y por tanto la de «$\neg(A \vee B) \to \to \neg A \wedge \neg B$»; sustituyendo se obtiene la fórmula universalmente válida «$\neg(A \vee \neg A) \to \neg A \wedge \neg\neg A$». Pero ya que «$\neg A \wedge \neg\neg A$» es una contradicción, «$\neg\neg(A \vee \neg A)$» tiene validez universal.

Las dos fórmulas siguientes, «$A \vee (A \to B)$» y «$(A \to B) \vee (B \to A)$», tienen validez universal clásicamente, pero no intuicionísticamente. En la lógica de proposiciones bivalente, «$A \to B$» puede definirse como «$\neg A \vee B$», con lo que puede eludirse la conexión de «$\to$»; pero esto no es posible aquí. Ciertamente, «$\neg A \vee B \to (A \to B)$» es universalmente válida, ya que lo son las fórmulas «$\neg A \to (A \to B)$» (ex falso quodlibet) y «$B \to (A \to B)$», pero no se tiene, a la inversa, la validez universal de «$(A \to B) \to \neg A \vee B$». Ocurre en general que no es posible eliminar ninguna de las cuatro conexiones proposicionales de «$\neg, \wedge, \vee, \to$», pues ninguna de ellas puede definirse por medio de las otras; a lo más puede decirse que es posible transcribir «$\neg$» por medio de «$\to$» si se introduce una fórmula determinada como contradictoria, tal «$1 = 2$» en la Matemática; pero en el interior del cálculo proposicional puro no es posible presentar una fórmula contradictoria únicamente por medio de «$\neg$».

Una vez que nos hemos familiarizado de un modo más heurístico con las vías del pensamiento intuicionista, vamos a dar una caracterización axiomá-

tica precisa del modo de deducción intuicionista. El mejor camino para ello es el del «concluir natural», propuesto por G. GENTZEN [7]; este método del citado autor puede servir, por otra parte, como una fundamentación de la lógica proposicional bivalente independiente del método de evaluación, pero no por ello caprichosa: lo observaremos en lo que sigue.

La axiomática de GENTZEN se diferencia radicalmente de las usuales: en cualquiera de los sistemas axiomáticos ordinarios (tanto intuicionistas como clásicos) de la lógica proposicional, el concepto fundamental es el de la deductibilidad; se dan ciertas fórmulas elementales que son *eo ipso* deductibles; se tienen además reglas del tipo, «cuando tales y tales fórmulas son deductibles, lo es asimismo tal otra fórmula determinada»; en el sistema axiomático de GENTZEN lo fundamental no es el concepto de deductibilidad simplemente, sino el de deductibilidad a partir de ciertas hipótesis. A las fórmulas elementales de los sistemas axiomáticos al uso corresponden determinadas estipulaciones del tipo, «a partir de tales y tales fórmulas es deductible tal otra fórmula», es decir, estipulaciones que entran en tales sistemas como reglas de deducción; y a las reglas de consecuencia de estos sistemas corresponden estipulaciones del siguiente tenor: «cuando una fórmula de cierto tipo es deductible de tales y cuales hipótesis, también es deductible de las mismas hipótesis, o de tales otras, otra nueva fórmula de un tipo determinado». El concepto de deductibilidad tal como le emplea GENTZEN corresponde justamente al concepto intuicionista de constructibilidad de una proposición a partir de otras.

En lo que sigue, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ significarán cualesquiera formas proposicionales.

Tenemos ahora las siguientes *relaciones fundamentales de deductibilidad:*

$\mathfrak{A}_n$ es deductible de las hipótesis $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $(n \geqq 1)$; (1)

$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ es deductible de las hipótesis $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; (2)

$\mathfrak{A}$ es deductible de $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$; (3)

$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}$; (4)

$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{B}$; (5)

$\mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$; (6)

la fórmula arbitraria $\mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A}$. (7)

Tenemos además ciertas *reglas* con las cuales podemos llegar a nuevas relaciones de deductibilidad a partir de las que ya tengamos:

I. Si $\mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, también lo es de toda permutación de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

II. Si la fórmula $\mathfrak{C}$ es deductible de $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$, y cada una de estas últimas fórmulas es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}$ es asimismo deductible de

$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ [aquí han de cumplirse $k \geqq 1$ y $n \geqq 0$; el caso de ser $n = 0$ significa que en lugar de «$\mathfrak{C}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$» nos encontramos con «$\mathfrak{C}$ es deductible (sin necesidad de hipótesis)»].

III. Si la fórmula $\mathfrak{D}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{D}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{C}$, también es $\mathfrak{D}$ deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ ($n \geqq 0$).

IV. Si la fórmula $\mathfrak{C}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$, también la fórmula $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ ($n \geqq 0$).

V. Si la fórmula $\mathfrak{C}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ y también $\neg \mathfrak{C}$ es deductible de las mismas hipótesis, la fórmula $\neg \mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{A}_n$ ($n \geqq 0$).

Las relaciones y reglas, (2) a (7) y III a V respectivamente, corresponden a las prescripciones relativas a la construcción formuladas antes, pero en las (1), I y II sólo se ha incorporado una axiomatización del concepto de deductibilidad. Cuando no se impone (7) se tiene el *cálculo mínimo* de I. JOHANSSON [12]. Si se introduce como (8) la relación, «$\mathfrak{A}$ es deductible de $\neg\neg\mathfrak{A}$», se llega al cálculo proposicional clásico, pero aquí no seguiremos por este camino.

Demos un ejemplo de un proceso deductivo. Ha de mostrarse que «$\neg\neg((A \to B) \vee (B \to A))$» es una forma proposicional intuicionísticamente de validez universal. En nuestro sistema axiomático esto significa que «$\neg\neg((A \to B) \vee (B \to A))$» es deductible sin más (sin necesidad de hipótesis). En el proceso de deducción que sigue indicaremos con «$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$» el enunciado «$\mathfrak{B}$ es deductible de $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$», sin que con ello introduzcamos un nuevo símbolo del cálculo de proposiciones; asimismo abreviamos el anunciado «$\mathfrak{B}$ es deductible sin necesidad de hipótesis», escribiendo «$\vdash \mathfrak{B}$».

Demostraremos primero un

LEMA. Si «$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$» es válido, también lo es «$\neg\mathfrak{B} \vdash \neg\mathfrak{A}$».

DEMOSTRACIÓN. $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ (hipótesis) (a)
$\neg\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A}$ [de acuerdo con (1)] (b)
$\neg\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ [a partir de (a) y (b), de acuerdo con II] (c)
$\mathfrak{A}, \neg\mathfrak{B} \vdash \neg\mathfrak{B}$ [de acuerdo con (1)] (d)
$\neg\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \vdash \neg\mathfrak{B}$ [a partir de (d), de acuerdo con I] (e)
$\neg\mathfrak{B} \vdash \neg\mathfrak{A}$ [a partir de (c) y (e), de acuerdo con V] (f)

Demostración de «$\vdash \neg\neg((A \to B) \vee (B \to A))$».

$A, \neg A \vdash B$ [de acuerdo con (7)] (a)
$\neg A, A \vdash B$ [a partir de (a), de acuerdo con I] (b)
$\neg A \vdash A \to B$ [a partir de (b), de acuerdo con IV] (c)
$\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A$ [a partir de (c), de acuerdo con el lema] (d)
$A \to B \vdash (A \to B) \vee (B \to A)$ [de acuerdo con (4)] (e)

$\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash \neg(A \to B)$ [a partir de (e), de acuerdo con el lema] (f)

$\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash \neg\neg A$ [a partir de (d) y (f), de acuerdo con II] (g)

$B, A \vdash A$ [de acuerdo con (1)] (h)

$A, B \vdash A$ [a partir de (h), de acuerdo con I] (i)

$A \vdash B \to A$ [a partir de (i), de acuerdo con IV] (j)

$\neg(B \to A) \vdash \neg A$ [a partir de (j), de acuerdo con el lema] (k)

$B \to A \vdash (A \to B) \vee (B \to A)$ [de acuerdo con (5)] (l)

$\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash \neg(B \to A)$ [a partir de (l), de acuerdo con el lema] (m)

$\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash \neg A$ [a partir de (m) y (k), de acuerdo con II] (n)

$\neg\neg((A \to B) \vee (B \to A))$ [a partir de (g) y (n), de acuerdo con V] (o)

A aquella parte de la lógica proposicional intuicionista que no emplea el signo «$\neg$» se la conoce con el nombre de *lógica positiva,* ya que sus métodos deductivos son independientes de la hipótesis de que a toda proposición corresponde otra opuesta, por lo que no se utiliza el signo de negación. El campo de las fórmulas universalmente válidas de la lógica proposicional positiva, o digamos de las fórmulas idénticas positivas, es más reducido que el de las fórmulas universalmente válidas de la lógica proposicional bivalente que no contienen el signo «$\neg$»; por ejemplo, «$((A \to B) \to A) \to A$» tiene validez universal en la lógica bivalente, como puede comprobarse inmediatamente por el método de evaluación, pero no es deductible en el sistema de axiomas que antecede.

A. HEYTING [8] ha dado un primer sistema de axiomas (en la forma usual) para las fórmulas universalmente válidas de la lógica proposicional intuicionista, y un segundo sistema en [9]. En HILBERT y BERNAYS, [10, § 3] y [11, suplemento III], se encuentran diversos sistemas de axiomas de la lógica de proposiciones intuicionista y de la positiva, con las correspondientes referencias bibliográficas. Acerca de las numerosas relaciones existentes entre el cálculo de proposiciones clásico y el intuicionista, en las cuales no podemos entrar aquí, confróntese por ejemplo KLEENE [13, § 81].

En el cálculo intuicionista nos falta un criterio sencillo de la validez universal de expresiones, como el que presenta el método de evaluación del cálculo clásico. Tiene importancia, por lo tanto, que G. GENTZEN haya presentado también en [7] un segundo sistema intuicionista de axiomas con cuya ayuda se puede decidir si una fórmula propuesta es deductible o no en el sistema; para esta cuestión remitimos, además de al trabajo original de GENTZEN, a los estudios sobre el sistema gentzeniano de H. B. CURRY [3] y S. C. KLEENE [13, §§ 77 a 80].

⋆ § 11. El concepto de implicación estricta

Vamos a hablar en este parágrafo sucintamente de otra desviación con respecto al cálculo proposicional ordinario; pero aquí mantenemos la noción fundamental de la lógica de proposiciones de que todo enunciado con sentido tiene, bien el valor «verdadero», bien el valor «falso». Introducimos las conexiones correspondientes a «$\neg$», «$\vee$» y «$\wedge$» en su sentido usual, como funciones veritativas. Pero no utilizaremos «$\rightarrow$» con el significado del § 1; habíamos observado allí que «$\rightarrow$» no transcribe el sentido que tenemos a la vista en el lenguaje corriente cuando decimos que un enunciado «se sigue» de otro; por ello no nos parecen acertados desde este punto de vista los enunciados «si la nieve es blanca se sigue que 7 es un número primo», «si la nieve es negra se sigue que 7 es un número primo» o «si la nieve es negra se sigue que 9 es un número primo», puesto que entre el primer miembro y el segundo de estas relaciones de consecuencia no existe coherencia lógica alguna. En realidad no existe ninguna necesidad ineludible de introducir una relación estricta de consecuencia, ya que nos bastan las funciones veritativas para llevar a cabo nuestro concluir lógico; pero el problema tiene cierto interés filosófico.

Como vamos a utilizar a continuación «$\rightarrow$» en el sentido estricto mencionado, podemos decir por lo pronto que las posibilidades de construcción o relaciones de consecuencia anteriores (pág. 42, *a)* a *c)*) para «$\wedge$», «$\vee$» y «$\rightarrow$» siguen conservándose ahora: es decir, también son universalmente válidas con el sentido estricto de «$\rightarrow$» fórmulas como «$A \rightarrow A$», «$A \wedge B \rightarrow A$», «$A \wedge B \rightarrow B$», «$A \rightarrow A \vee B$» y «$B \rightarrow A \vee B$». Podemos decir en general que todas las fórmulas intuicionistas de validez general que tengan la forma «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» continúan siendo universalmente válidas en caso de que tanto $\mathfrak{A}$ como $\mathfrak{B}$ estén formadas únicamente con ayuda de «$\vee$» y «$\wedge$», ya que contamos con los principios de construcción necesarios (por lo demás son éstas las mismas fórmulas de este tipo que continúan teniendo validez universal clásicamente). También son válidas universalmente «$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$», «$(C \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A \wedge B)$» y «$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$». Además ha de conservarse la transitividad de las relaciones de consecuencia, es decir, «$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$» tiene que ser universalmente válida. Pero por otra parte existen fórmulas intuicionísticamente de validez universal que debemos rechazar como tales desde el punto de vista actual: a ellas pertenece, por ejemplo, la fórmula «$A \rightarrow (B \rightarrow A)$». Vamos a aclarar este punto. Si tal fórmula fuese válida universalmente obtendríamos una proposición verdadera introduciendo en los lugares de A y B cualesquiera proposiciones concretas; supongamos que «Φ» es la proposición «7 es un número primo», y «Ψ» la proposición «la nieve es blanca»: bajo nuestra hipótesis, «$\Phi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Phi)$» debería ser verdadera; puesto que también ahora de «Φ»

y «$\Phi \to \Gamma$» se puede concluir «Γ» y dado que «Φ» es verdadera, sería menester asimismo que lo fuese «$\Psi \to \Phi$», o sea «(la nieve es blanca) → (7 es un número primo)», lo cual no es compatible, sin embargo, con el carácter de «→». En vista de que «$A \wedge B \to A$» es universalmente válida, pero no así «$A \to (B \to A)$», es patente que no se conserva la equivalencia de «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$» y «$\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$», que incluso intuicionísticamente era válida; esto significará que la regla IV del sistema intuicionista del parágrafo precedente no puede ya utilizarse aquí.

En lo que respecta a las fórmulas con signos de negación, no solamente es universalmente válida la fórmula intuicionista «$A \to \neg\neg A$», sino que además lo es asimismo «$\neg\neg A \to A$», puesto que al entender «→» como una función veritativa significan lo mismo «Φ» y «$\neg\neg \Phi$»; tampoco ofrece ninguna duda que a la fórmula intuicionista de validez universal «$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$» ha de reconocérsele aquí idéntica validez. Por el contrario, ahora debemos rechazar la validez universal de «$\neg A \to (A \to B)$»; pues si «Φ» significa la proposición «la nieve no es blanca» y «Ψ» la proposición «7 es un número primo», «$\neg \Phi \to (\Phi \to \Psi)$» debería ser verdadera; pero puesto que, además, «$\neg \Phi$» es verdadera, «$\Phi \to \Psi$» tendría que serlo también, aun cuando una vez más no hay coherencia lógica entre Φ y Ψ.

Sobre los fundamentos que hemos esbozado estableció por primera vez C. I. LEWIS [14, 15] un sistema de axiomas de la «*implicación estricta*», del cual existen numerosas variantes. Por otra parte, LEWIS parte para introducir tal sistema de conceptos modales, como «necesario», «posible», «imposible», que integra en aquél. De hecho, resulta natural una conexión entre estos conceptos y el de implicación estricta: pues si una proposición implica en sentido estricto una contradicción, no cabe duda de que no es solamente falsa, sino imposible; y cuando la negación de una proposición es imposible, ésta es necesaria.

No describiremos el camino tomado por LEWIS, ya que su concepción de esta materia no coincide con la nuestra: pues según LEWIS la fórmula «$A \to B \vee \neg B$» es universalmente válida por serlo «$B \vee \neg B$»; pero esto significaría que se ha de considerar verdadero el enunciado «(la nieve es blanca) → (7 es un número primo) ∨ (7 no es un número primo)», acerca del cual tiene que surgir inmediatamente de nuevo la cuestión de la coherencia lógica entre el primer miembro y el segundo de esta implicación; además, la fórmula «$A \wedge \neg A \to B$» es para LEWIS universalmente válida, lo cual rechazamos igualmente nosotros (esta vez concordando con el cálculo mínimo). Por otra parte, el rechazar cierto tipo de fórmulas —las «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$» que únicamente fueran válidas universalmente cuando lo sea «$\mathfrak{B}$»— va ligado indisolublemente al rechazo de las fórmulas «$\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$» que fueran universalmente válidas nada más que cuando lo sea «$\neg \mathfrak{C}$». Según LEWIS, por ejemplo, «$\neg (B \vee \neg B) \to A$» tiene validez universal, y por tanto ocurre lo mismo

con «$\neg (B \vee \neg B) \rightarrow \neg A$»; puesto que, como ya hemos dicho, de la implicación estricta de «$\Phi \rightarrow \Psi$» se puede concluir «$\neg \Psi \rightarrow \neg \Phi$», debería ser también universalmente válida «$\neg \neg A \rightarrow \neg \neg (B \vee \neg B)$, y por ello también tendría que serlo «$A \rightarrow B \vee \neg B$». Si, inversamente, partimos de la fórmula «$\neg B \rightarrow \neg (A \wedge \neg A)$», que es universalmente válida para LEWIS, puesto que el segundo miembro de la implicación lo es, análogamente se llegaría a «$A \wedge \neg A \rightarrow B$».

El autor ha dado en [1] dos sistemas equivalentes de axiomas para las fórmulas universalmente válidas de la «implicación estricta» en su sentido. Presentamos a continuación uno de ellos.

Las expresiones de nuestro sistema han sido ideadas de tal modo que se forman del modo usual a partir de las variables proposicionales por medio de los cuatro signos conectivos «$\neg$», «$\vee$», «$\wedge$», y «$\rightarrow$». Con $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... se designan en lo que sigue expresiones cualesquiera de dicho tipo.

FÓRMULAS ELEMENTALES: son todas las fórmulas de los tipos siguientes:

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \tag{1}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})) \tag{2}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B})) \tag{3}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \tag{4}$$
$$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \tag{5}$$
$$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B} \tag{6}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \tag{7}$$
$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \tag{8}$$
$$\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \tag{9}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \wedge (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \tag{10}$$
$$\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \tag{11}$$
$$(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\neg \mathfrak{B} \rightarrow \neg \mathfrak{A}) \tag{12}$$
$$\mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{B} \rightarrow \neg (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \tag{13}$$
$$\mathfrak{A} \rightarrow \neg \neg \mathfrak{A} \tag{14}$$
$$\neg \neg \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \tag{15}$$

Tenemos como *reglas de deducción:*

I. de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ se deduce $\mathfrak{B}$;
II. de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se deduce $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$;
III. de $\mathfrak{A}$ y $\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ se deduce $\mathfrak{B}$;
IV. de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ se deduce $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$.

Demos un ejemplo de un proceso deductivo: el de la fórmula universalmente válida «$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$».

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B))$ [fórmula elemental (3)] (a)

$A \wedge (A \to B) \to A$ [fórmula elemental (5)] (b)

$(A \to B) \to (A \wedge (A \to B) \to B)$ [a partir de (a) y (b), de acuerdo con IV] (c)

$((A \to B) \to (A \wedge (A \to B) \to B)) \to ((A \wedge (A \to B) \to (A \to B)) \to$ (d)
$\to ((A \wedge (A \to B) \to (A \wedge (A \to B) \to B)))$ [fórmula elemental (3)]

$(A \wedge (A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \wedge (A \to B) \to (A \wedge (A \to B) \to B))$ (e)

[a partir de (c) y (d), de acuerdo con I]

$A \wedge (A \to B) \to (A \to B)$ [fórmula elemental (6)] (f)

$(A \wedge (A \to B)) \to (A \wedge (A \to B) \to B)$ [a partir de (e) y (f), de acuerdo con I] (g)

$((A \wedge (A \to B) \to (A \wedge (A \to B) \to B)) \to (A \wedge (A \to B) \to B)$ [fórmula elemental (4)] (h)

$A \wedge (A \to B) \to B$ [a partir de (g) y (h), de acuerdo con I] (i)

Por otra parte, el sistema de axiomas podría haberse dado de tal forma que hubiéramos tenido solamente un número finito de fórmulas elementales, en lugar de un número finito de clases de fórmulas elementales de tipos determinados: hubiésemos propuesto sólo la fórmula elemental «$A \to A$» en vez de la clase de fórmulas elementales «$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$», sólo «$(A \to B) \to$ $\to ((B \to C) \to (A \to C))$» y no «$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$», etc. A las reglas de deducción podría agregarse ciertamente otra, a saber: por sustitución en una fórmula universalmente válida se obtiene otra fórmula también universalmente válida —hemos establecido ya el concepto de sustitución (cf. § 3). Como no hemos llegado a un número finito de fórmulas elementales, sino a un número finito de clases de fórmulas elementales de determinados tipos, se habla de *esquemas de axiomas*.

Este sistema axiomático no nos proporciona solamente las fórmulas de la implicación estricta, sino también todas las fórmulas universalmente válidas del cálculo proposicional bivalente en la forma en que éstas se transcriben mediante «$\overline{}$», «$\vee$» y «$\wedge$». No daremos aquí la prueba de esta afirmación, ya que el presente parágrafo pretende únicamente dar a conocer de modo breve el concepto de implicación estricta, sobre el cual no se volverá en este libro. Remitimos para los demás detalles de este sistema de axiomas a [1].

Ejercicios del capítulo primero

1. Transcríbanse los enunciados que siguen de modo que se utilicen los signos de las conexiones fundamentales:

a) Si 2 es menor que 3 y 5 no es menor que 3, 2 es menor que 5.

b) Trabajes o no trabajes, te has de ganar el dinero necesario para la subsistencia.

c) O bien 17 es un número primo y par, o bien 17 no es número primo ni par.

(Observación: no influye para nada que los enunciados presenten aserciones verdaderas o falsas.)

2. Exprésense los enunciados siguientes, que están escritos del modo usual en las matemáticas, por medio de los signos lógicos: «Φ es condición necesaria para Ψ»; «Φ es condición suficiente para Ψ»; «Φ es condición necesaria y suficiente para Ψ».

3. Considérese el enunciado: «si 2 es igual a 2 y 18 es divisible por 5, entonces 4 es menor que 3 y 28 es divisible por 7».

a) Formúlese este enunciado por medio de los signos de las conexiones proposicionales.

b) ¿Cómo podría sustituirse este enunciado por otro más sencillo del mismo valor veritativo, sabiendo que «2 es igual a 2» es verdadero y «4 es menor que 3» es falso?

c) ¿Cuál es el valor veritativo del enunciado dado cuando se sabe que «2 es igual a 2» y «28 es divisible por 7» son verdaderos, y que «18 es divisible por 5» y «4 es menor que 3» son falsos?

4. Véase, de entre los enunciados siguientes, cuáles son tautologías:

a) Si emprendo un viaje, y siempre que emprendo un viaje, me repongo; y siempre que me repongo puedo trabajar mejor, de modo que puedo trabajar mejor.

b) Si no es verdad que emprendes un viaje y no viajas en ferrocarril, entonces emprendes un viaje bajo la hipótesis de que viajas en ferrocarril.

5. Entre las expresiones siguientes, ¿cuáles son universalmente válidas? «$(A \to B) \vee (B \to A)$», «$((A \to B) \to A) \to A$», «$\neg (A \wedge \neg B) \to (B \to A)$», «$(A \to B) \vee A$», «$(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge \neg C \to \neg A \vee \neg B$»?

a) Compruébese por el método de evaluación.

b) Compruébese por desarrollo de la forma normal conyuntiva.

c) Compruébese utilizando el sistema de axiomas del § 9.

6. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son contradicciones y cuáles son cumplibles? «$A \wedge (A \to B) \wedge \neg B$», «$\neg (A \wedge B) \wedge (C \to \neg A)$», «$(A \to \to (B \to C)) \wedge A \wedge B \wedge \neg C$», «$A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg (B \to C)$», «$(A \vee \neg B \vee \vee C) \wedge \neg A \wedge B$».

a) Compruébese estudiando si las negaciones de las expresiones son tautológicas.

b) Estúdiese tal cosa preparando una forma normal disyuntiva de la expresión.

7. ¿Qué parejas de expresiones hay equivalentes entre las siguientes:

«$A \wedge B \to C$» y «$A \to (B \to C)$», «$A \to (A \to B)$» y «$\neg B \to \neg A$», «$A \to (B \to A)$» y «$B \wedge (\neg B \to A)$», «$A \vee \neg A$» y «$A \to A$», «$B \to C \vee D$» y «$\neg C \wedge (D \to B)$»?

8. Demuéstrese si entre las siguientes parejas algunas son parejas de expresiones equivalentes. Dense en su caso otras parejas de expresiones equivalentes por medio del Principio de dualidad.

Los pares de expresiones son: «$A \wedge (B \vee C)$» y «$B \vee (A \wedge C)$», «$\neg (A \wedge \wedge B) \vee C$» y «$\neg A \vee \neg B \vee \neg\neg C$», «$\neg (A \vee A) \vee B$» y «$\neg\neg (B \wedge B) \vee \vee \neg A$», «$\neg (A \vee \neg A) \vee B$» y «$A \vee (\neg A \vee B)$».

9. Transcríbanse todas las expresiones de los ejercicios anteriores que contengan los signos «$\vee$» y «$\wedge$», exclusivamente con «$\to$» y «$\neg$».

10. Exprésense todas las formas proposicionales citadas mediante la conexión barra shefferiana.

11. Dese una lista de expresiones no equivalentes formadas con A, B y C, de modo que cualquier otra expresión formada con A, B y C sea equivalente a una de aquéllas.

12. Obsérvese la siguientes lista de enunciados; «hoy es el cumpleaños de Pablo o de Miguel», «si hoy es el cumpleaños de Pablo recibirá una máquina fotográfica», «si hoy es el cumpleaños de Miguel recibirá un álbum de sellos», «Miguel no recibirá hoy ningún álbum de sellos».

a) ¿Se sigue de estos enunciados este otro: «hoy es el cumpleaños de Pablo»?

b) Compruébese tal cosa en su caso mediante una deducción axiomática de acuerdo con el § 9.

c) Dense todas las consecuencias no equivalentes entre sí de los enunciados anteriores.

13. Compruébese lo mismo que en 12. cuando se parte de los enunciados: «si Inge estudia francés, entonces también estudia latín o español», «Inge no estudia latín» y «Inge estudia francés, o latín, o español», y se adopta como conclusión el enunciado «Inge estudia español».

14. Inténtese dar en el sistema de axiomas del § 10 una deducción de las expresiones que en el mismo parágrafo se indicaron ser universalmente válidas intuicionísticamente.

15. Trátese de encontrar en el sistema de axiomas del § 11 la deducción de la fórmula

$$«(A \to (B \to C)) \wedge (D \to B) \to (A \to (D \to C))»$$

CAPÍTULO II

EL CALCULO DE CLASES

La forma de cálculo empleada hasta ahora es suficiente para la representación de los complejos lógicos en los que las proposiciones se consideran como totalidades sin analizar; pero no se puede decir, en modo alguno, que el cálculo de proposiciones sea bastante en general para los fines de la lógica. Por ejemplo, no cabe duda de que el enunciado «si el león es una fiera y si las fieras devoran carne, entonces el león devora carne» es correcto por razones puramente lógicas; tendríamos otro ejemplo de un enunciado del mismo tipo con: «si los números primos impares comprenden todos los números naturales, si un número impar es un número natural y si un número primo es un número natural, entonces los números impares comprenden todos los números naturales y los números primos comprenden todos los números naturales». Si abreviamos «el león es una fiera» escribiendo «Φ», «las fieras devoran carne» por medio de «Ψ» y «el león devora carne» con el signo «Γ», el primer enunciado puede transcribirse de la forma siguiente: «$\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Gamma$»; pero esto no es de utilidad alguna para reconocer el carácter lógico de tal proposición, ya que «$\Phi \wedge \Psi \rightarrow \Gamma$» no es una tautología (de la teoría de proposiciones), es decir, no procede de la sustitución en una fórmula universalmente válida del cálculo proposicional. Análogamente, y si designamos por «Φ», «Ψ», «Γ», «Δ» y «Θ» los enunciados individuales, podemos representar el segundo enunciado total por «$\Phi \wedge \Psi \wedge \Gamma \rightarrow \Delta \wedge \Theta$», sin que con ello consigamos ver cuál es su carácter lógico. Por el contrario, en estos enunciados desempeña un papel esencial, no solamente cada una de las proposiciones como un todo, sino la estructura lógica interior de las mismas —que se traduce lingüísticamente en la relación entre sujeto y predicado.

§ 1. Las conexiones de clases y las relaciones entre clases

Si observamos con mayor precisión los ejemplos de enunciados que hemos dado arriba, encontraremos que versan sobre determinadas propiedades. Una

propiedad es aquello en que convienen o no convienen ciertas cosas individuales: en el primer enunciado se habla de las siguientes propiedades: «ser un león», «ser una fiera», «devorar carne». Si queremos introducir la palabra «propiedad», podemos manifestar el enunciado «el león es una fiera», de un modo, es cierto, deficientemente articulado, en la forma siguiente: «cualquier cosa» (en este caso sería mejor emplear «ente individual») que tenga la propiedad de «ser un león», tendrá también la propiedad de «ser una fiera»; es posible transcribir el enunciado «las «fieras devoran carne» con mayor pesadez, pero más claramente, con: «cualquier cosa (o ente) que tenga la propiedad de 'ser una fiera' tendrá asimismo la propiedad de 'ser un devorador de carne'». Por otra parte, los enunciados «el león es una fiera» y «las fieras devoran carne» pueden expresarse lingüísticamente de los modos más diversos, tales como: «todo león es una fiera», «los leones son fieras», «todos los leones son fieras», «toda fiera devora carne», «todas las fieras son devoradoras de carne»; tampoco es necesario que aparezca la cópula lingüística «es» en estas oraciones. Empleamos la expresión «propiedad» en el mismo sentido en que la palabra «predicado» se emplea en los enunciados (juicios) que filosóficamente se designan como categóricos. Pero queremos mantener en estas consideraciones introductorias la palabra «propiedad», porque vamos a utilizar «predicado» en el capítulo III en un sentido más general. [Por lo demás, la forma lingüística de un enunciado no apunta de un modo inequívoco el hecho lógico mentado, en modo alguno; si decimos «la sal común es cloruro sódico», no queremos indicar con ello solamente que todo lo que tiene la propiedad de «ser sal común» tiene asimismo la de «ser cloruro sódico», sino también lo inverso, que todo lo que tiene la propiedad de «ser cloruro sódico» posee también la de «ser sal común»; cuando decimos «2 es un número primo» no se trata de dos propiedades, sino de que se atribuye la propiedad «ser un número primo» a la cosa singular (individuo) «2». El hecho de que la forma lingüística usual de los enunciados no nos proporcione una indicación inequívoca de la situación lógica en que se basan, realza la importancia que posee desde este punto de vista un simbolismo lógico preciso.]

A partir de propiedades es posible construir otras propiedades, y cada dos pueden combinarse formando otra propiedad: de la propiedad «bello» se deriva la de «no bello» o «feo», que posee todo lo que no tiene la propiedad de «bello»; partiendo de las propiedades «ser par» y «ser un número primo» se llega por combinación a la propiedad «ser un número primo par», poseída por las cosas a las que convienen tanto la propiedad de «ser par» como la de «ser un número primo»; tomando como origen las dos propiedades «ser divisible por 2» y «ser divisible por 3» advenimos por combinación a «ser divisible por 2 o por 3», que afecta a todas las cosas a las que afecta una por lo menos de las dos propiedades «ser divisible por 2» y «ser divisible por 3».

No vamos a fundamentar nuestro cálculo directamente sobre las propiedades, sino que vamos a construirlo de un modo algo distinto, que ofrece ventajas también desde el punto de vista de la facilidad con que se ponen ejemplos. A cada propiedad de las cosas corresponde la reunión o la *clase* de los objetos que poseen tal propiedad. Por ejemplo, a la propiedad «ser un número primo» corresponde la clase de las cosas (2, 3, 5, 7, 11, etc.). En la clase correspondiente a una propiedad no se trata del contenido, sino de la extensión de la propiedad. Se consideran como idénticas las clases que contienen los mismos objetos: así, en la geometría elemental son idénticas la clase de los triángulos con dos lados iguales y la clase de los triángulos con dos ángulos iguales (en las matemáticas se utiliza corrientemente la palabra «conjunto» en lugar de «clase»). En vez de decir «x pertenece a una clase» se dice ordinariamente «x es un elemento de la clase». Es conveniente introducir también la *clase nula* o *clase vacía,* o sea la clase que no contiene ningún elemento: de este modo podemos decir que a toda propiedad corresponde una clase, ya que es posible que una propiedad no convenga a ningún objeto.

En lugar de combinar las propiedades podemos análogamente combinar las clases respectivas, ya que en nuestras relaciones lógicas sólo nos conciernen las extensiones de las propiedades. Nos serviremos en lo que sigue de α, β, γ y otras letras minúsculas griegas para designar clases determinadas. Tenemos las siguientes *conexiones de clases:*

1. «$\alpha \cap \beta$» designa la clase que consta de los elementos que son a la vez elementos de α y de β. A «$\alpha \cap \beta$» se le llama la *intersección* de las clases α y β. Si, por ejemplo, α es la clase de las mujeres y β es la clase de los cónyuges, «$\alpha \cap \beta$» es la clase de las mujeres cónyuges, o sea de las casadas.

2. «$\alpha \cup \beta$» designa la clase que consta de todos los elementos que pertenecen por lo menos a una de las clases α o β. A «$\alpha \cup \beta$» se le llama la *reunión* de α y β. En caso de ser α la clase de los hombres adultos y β la clase de las mujeres adultas, «$\alpha \cup \beta$» será la clase de las personas adultas simplemente.

Las conexiones «$\cup$» y «$\cap$» son conmutativas, de modo que «$\alpha \cup \beta$» designa la misma clase que «$\beta \cup \alpha$», y lo mismo ocurre con «$\alpha \cap \beta$» y «$\beta \cap \alpha$». Además, ambas conexiones son asociativas, con lo cual «$\alpha \cup (\beta \cup \gamma)$» y «$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma$» mencionan la misma clase; y por otro lado lo mismo ocurre con «$\alpha \cap (\beta \cap \gamma)$» y «$(\alpha \cap \beta) \cap \gamma$». En virtud de la ley asociativa pueden escribirse sin paréntesis conexiones multimembres formadas únicamente con «$\cap$» o sólo con «$\cup$».

3. «$\bar{\alpha}$» designa la clase que consta de todos los elementos que no pertenecen a la clase «α»; «$\bar{\alpha}$» se llama el *complemento* de «α». Esta definición necesita una aclaración: si «α» es la clase de los enfermos, «$\bar{\alpha}$» no compren-

derá todo cuanto no merezca el nombre de enfermo, puesto que cuando hablamos de una conexión de clases pensamos siempre en cierto campo de individuos [1] en el interior del cual tiene sentido tal conexión. Si hablamos de una clase de los enfermos, el campo de individuos correspondiente será la clase de los seres vivos, para los cuales tienen sentido las propiedades «enfermo» y «no enfermo»; por tanto, la clase de los «no enfermos» comprende la clase de los seres vivos no enfermos; en determinados casos podría considerarse aún más reducido este campo de individuos, podría entenderse solamente la clase de los seres humanos, en lugar de la clase de los seres vivos. Llamamos *clase universal* a la que incluye todos los elementos del campo de individuos; es el complemento de la clase nula. Para toda clase α, «$\alpha \cup \bar{\alpha}$» es siempre la clase universal.

Las conexiones de clases mencionadas pueden combinarse de múltiples maneras, por lo cual emplearemos ocasionalmente paréntesis para delimitar el campo de las conexiones individuales. Pero con lo que hemos dicho hasta ahora no nos es posible formar enunciados, es decir, proposiciones sobre clases; nos valdremos para ello de las dos relaciones siguientes:

4. «$\alpha \subset \beta$» significa la proposición de que la clase α está contenida en la clase β, o sea la que afirma que todos los elementos de α son también elementos de β; llamamos *relación de inclusión* a la relación «$\alpha \subset \beta$». Si $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_2$ son dos propiedades que definen respectivamente a las clases α y β, «$\alpha \subset \beta$» quiere decir, pues, que todo lo que posee la propiedad $\mathfrak{E}_1$ tiene también la propiedad $\mathfrak{E}_2$. En las matemáticas suele expresarse la proposición «$\alpha \subset \beta$» diciendo que la clase α es una *clase parcial* o una *subclase* de la β.

Si α designa, digamos, la clase de los ácidos y β la de los compuestos químicos, «$\alpha \subset \beta$» quiere decir: «la clase de los ácidos está contenida en la clase de los compuestos químicos»; o más brevemente, «los ácidos son compuestos químicos». Si α es la clase de los números primos, β la clase de los números impares y γ la clase de los números menores que 3, «$\alpha \subset \beta \cup \gamma$» significa: «la clase de los números primos está contenida en la clase que se obtiene por reunión de la clase de los números impares y de la clase de los números menores que 3»; o con mayor brevedad, «los números primos son impares o menores que 3». En general, un enunciado de la forma «lo que es $\mathfrak{E}_1$ es también $\mathfrak{E}_2$», en el cual $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_2$ significan propiedades, se transcribirá en el cálculo de clases mediante una fórmula del tipo «$\alpha \subset \beta$»; y los enunciados de las formas, «lo que es $\mathfrak{E}_1$ y $\mathfrak{E}_2$, es también $\mathfrak{E}_3$», «lo que es $\mathfrak{E}_1$ o $\mathfrak{E}_2$, es también $\mathfrak{E}_3$», «lo que es $\mathfrak{E}_1$, es también $\mathfrak{E}_2$ y $\mathfrak{E}_3$» y «lo que es $\mathfrak{E}_1$, es también $\mathfrak{E}_2$ o $\mathfrak{E}_3$», por medio de fórmulas de los siguientes tipos respectivos: «$\alpha \cap \beta \subset \gamma$», «$\alpha \cup \beta \subset \gamma$», «$\alpha \subset \beta \cap \gamma$» y «$\alpha \subset \beta \cup \gamma$».

---

[1] También se ha llamado *universo del discurso. (N. del T.)*

5. «$\alpha = \beta$» significa la proposición según la cual las dos clases α y β son idénticas, o en otras palabras, poseen los mismos elementos; «$\alpha = \beta$» significa también que «$\alpha \subset \beta$» y «$\beta \subset \alpha$» son verdaderas.

Con las proposiciones elementales de la teoría de clases formadas con «$\subset$» y «$=$», podemos aplicar las conexiones del cálculo proposicional, lo que nos porporciona una multiplicidad de proposiciones.

Estamos ahora en condiciones de transcribir de un modo satisfactorio los enunciados que habíamos aducido en la introducción de este capítulo.

EJEMPLO 1: si el león es una fiera y si las fieras devoran carne, entonces el león devora carne.

Sea α la clase de los leones, β la clase de las fieras y γ la de los devoradores de carne. Transcribiremos el enunciado del modo siguiente: «$(\alpha \subset \beta) \wedge \wedge (\beta \subset \gamma) \rightarrow (\alpha \subset \gamma)$».

EJEMPLO 2: si los números primos impares comprenden todos los números naturales, si un número impar es un número natural y si un número primo es un número natural, entonces los números impares comprenden todos los números naturales y los números primos comprenden todos los números naturales.

Sea α la clase de los números impares, β la clase de los números primos y γ la de los números naturales. El enunciado se escribirá como sigue: «$(\gamma \subset \alpha \cap \beta) \wedge (\alpha \subset \gamma) \wedge (\beta \subset \gamma) \rightarrow (\gamma \subset \alpha) \wedge (\gamma \subset \beta)$». [En lugar de «$(\gamma \subset \alpha) \wedge \wedge (\gamma \subset \beta)$» podría también figurar «$\gamma \subset \alpha \cap \beta$»].

Incluimos aún un TERCER EJEMPLO: los animales que no viven en el agua son animales que no devoran carne, o carnívoros que no viven en el agua.

Sea α la clase de los animales, β la clase de los seres vivos que viven en el agua y γ la de los carnívoros. La escritura simbólica diría así: «$(\alpha \cap \bar{\beta}) \subset \subset (\alpha \cap \bar{\gamma}) \cup (\gamma \cap \bar{\beta})$».

Ahora llega el momento de saber cuándo son verdaderos por razones puramente lógicas enunciados como los anteriores: nos ocuparemos de esta cuestión en el § 2.

§ 2. Las expresiones universalmente válidas del cálculo de clases

Introducimos *variables de clase* de modo análogo a como lo hicimos en el capítulo primero con las variables proposionales; utilizaremos como signos de aquéllas *a, b, c* y otras letras minúsculas latinas. Vamos a definir ahora el concepto de *término de clase,* lo cual haremos mediante las siguientes reglas:

1. Las variables de clase son términos de clase.
2. Si $\mathfrak{a}$ es un término de clase, $\bar{\mathfrak{a}}$ es asimismo un término de clase.
3. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son términos de clase, también lo son $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Mediante paréntesis se delimitan los campos afectados por las conexiones de clases, de suerte que si $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ no constan de una sola letra o tienen la forma «$\bar{\mathfrak{c}}$», en lugar de «$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$» y de «$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$» escribiremos respectivamente «$(\mathfrak{a}) \cup (\mathfrak{b})$» y «$(\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b})$». Las letras minúsculas góticas sirven para designar términos de clase cualesquiera. Un término de clase es únicamente aquéllo que se obtiene como tal tras una aplicación finita de las tres reglas que acabamos de dar: son, pues, términos de clase, «a», «b», «$\bar{b}$», «$\overline{a \cup b} \cap c$», «$a \cap \overline{a \cap a}$», etc.

Definimos además el concepto de *«expresión del cálculo de clases»* mediante las siguientes reglas:

5. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son términos de clase, «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» y «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$» son expresiones.

6. Si «$\mathfrak{A}$» es una expresión, «$\overline{\ } \mathfrak{A}$» es asimismo una expresión.

7. Si «$\mathfrak{A}$» y «$\mathfrak{B}$» son expresiones, también lo son «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» y «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$».

Toda expresión se obtiene tras una aplicación finita de las reglas 5. a 7., a partir de términos de clase; por tanto son también expresiones, por ejemplo, «$(a = b \cup \bar{b}) \vee (b \cup \bar{b} \subset a)$», «$a = b \rightarrow a \cup c = b \cup c$», etc.

Se dice que una expresión es universalmente válida —podemos indicar provisionalmente— cuando da lugar a proposiciones verdaderas siempre que las variables de clase se sustituyen por clases especiales. Pero esto no es suficientemente preciso. Consideremos la expresión «$(a = a \cup \bar{a}) \vee (a = a \cap \bar{a})$»; adoptemos por campo de individuos el que contiene un solo individuo, de modo que con los elementos del mismo sólo puedan formarse dos clases: la clase nula, que carece de elementos, y la clase universal, que consta del único individuo del campo de individuos; vamos a designar con «0» la clase nula de este campo y con «1» la clase universal del mismo. Preguntamos ahora si la fórmula últimamente dada pasa a ser siempre una proposición verdadera cuando a se sustituye por una clase cualquiera del campo de individuos mencionado. De hecho ocurre así. Si sustituimos a por 0, la expresión se transforma en la proposición «$(0 = 0 \cup \bar{0}) \vee (0 = 0 \cap \bar{0})$»; pero «$\bar{0} = 1$», de manera que la proposición puede también escribirse «$(0 = 0 \cup 1) \vee (0 = 0 \cap 1)$»; además, «$0 \cup 1 = 1$» y «$0 \cap 1 = 0$», con lo cual se reduce a «$0 = 1 \vee 0 = 0$»: como «$0 = 0$» es verdadera, la proposición es verdadera. Si sustituimos a por 1, obtenemos: «$(1 = 1 \cup \bar{1}) \vee (1 = 1 \cap \bar{1})$»; puesto que «$\bar{1} = 0$», que «$1 \cup 0 = 1$» y que «$1 \cap 0 = 0$», la expresión se transforma finalmente en «$(1 = 1) \vee (1 = 0)$», y por tanto será también verdadera. La expresión «$(a = a \cup \bar{a}) \vee (a = a \cap \bar{a})$» se convierte, pues, en una proposición verdadera en el campo de individuos que tiene un solo elemento, mediante sustitución de la variable a por clases formadas con los elementos del campo mencionado; decimos que es *válida* en tal campo, o brevemente, que es *válida-1* (es decir, válida en un campo de individuos con un solo elemento).

Como el concepto de validez-1 desempeñará cierto papel en las explicaciones posteriores, aclararemos ahora detalladamente cómo se demuestra en general la validez-1 de una expresión cualquiera. En primer término se sustituyen todas las variables de clase de un modo arbitrario por 0 o 1, cuidando como es natural que una misma variable de clase esté sustituida del mismo modo en todos los lugares en que aparezca; se eliminan luego todos los signos de conexiones de clases, para lo cual se sustituyen reiteradamente: $\bar{0}$ por 1; $\bar{1}$ por 0; $0 \cap 0$, $0 \cup 0$, $0 \cap 1$ y $1 \cap 0$ por 0; $0 \cup 1$, $1 \cup 0$, $1 \cap 1$ y $1 \cup 1$ por 1. Al terminar esta operación se tienen sólo proposiciones elementales de las formas $0 \subset 0$, $0 \subset 1$, $1 \subset 1$, $0 = 0$ y $1 = 1$, y de las $1 \subset 0$, $0 = 1$ y $1 = 0$; se sustituyen las cinco primeras formas por «$\curlyvee$» y las otras por «$\curlywedge$», a partir de lo cual, y de acuerdo con las reglas del capítulo I, § 2, la proposición total se reduce a «$\curlyvee$» o a «$\curlywedge$». La expresión se llama válida-1 cuando —y sólo cuando— tras este proceso aparece siempre el valor «$\curlyvee$», cualquiera que sea la sustitución de partida de las variables de clase.

Hemos visto que la expresión anterior, «$(a = a \cup \bar{a}) \vee (a = a \cap \bar{a})$», es válida-1; pero no es válida en un campo de individuos que contenga más de un elemento; en estos campos de individuos existen otras clases además de la clase nula y de la clase universal (que comprende todos los elementos del campo): por ejemplo, las clases que constan de un solo elemento; si α es una de estas últimas clases, sustituyendo a por α en la expresión del ejemplo se obtendría la proposición «$(\alpha = \alpha \cup \bar{\alpha}) \vee (\alpha = \alpha \cap \bar{\alpha})$»; ahora bien, «$\alpha \cup \bar{\alpha}$» es igual a la clase universal, y «$\alpha \cap \bar{\alpha}$» a la clase nula: por ello la proposición es falsa, ya que α es diferente tanto de la clase universal como de la clase nula.

Decimos, pues, que «$(a = a \cup \bar{a}) \vee (a = a \cap \bar{a})$» *no es universalmente válida,* dado que su validez no se extiende a todos los campos de individuos.

Podemos definir ya la validez universal del siguiente modo: se llama universalmente válida a una expresión si es válida en todo campo de individuos no vacío, es decir, en todo campo de individuos que contenga por lo menos un elemento: o sea, que la expresión debe convertirse en una proposición verdadera en todo campo de este tipo cuando se sustituyan las variables de clase por clases cualesquiera formadas con elementos del campo del caso.

Como antes, dos expresiones $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se llaman equivalentes cuando «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$» es universalmente válida. Si $\mathfrak{A}$ eq $\mathfrak{B}$, la expresión $\mathfrak{C}$ se convierte en otra equivalente al sustituir en ella la expresión parcial $\mathfrak{A}$ por la $\mathfrak{B}$; lo mismo ocurre, por lo demás, cuando «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$» es de validez universal y en $\mathfrak{C}$ se sustituye el término parcial $\mathfrak{a}$ por el $\mathfrak{b}$.

Ofrecemos algunas equivalencias.

$$«a \subset b» \text{ eq } «\bar{a} \cup b = b \cup \bar{b}». \tag{1}$$

Demostración. Si «$\alpha \subset \beta$» es válida, todos los elementos de α son también elementos de β, y todos los de $\bar{\beta}$ lo son asimismo de $\bar{\alpha}$; también contiene $\bar{\alpha} \cup \beta$ todos los elementos de $\bar{\beta} \cup \beta$, o sea que contiene en general todos los elementos del campo individual. Si, a la inversa, «$\bar{\alpha} \cup \beta = \beta \cup \bar{\beta}$» es verdadera, $\bar{\alpha} \cup \beta$ es la clase universal, de modo que todo elemento del campo de individuos está contenido en $\bar{\alpha}$ o en β: por tanto, todo elemento de α ha de estar contenido en β, ya que no puede estarlo en $\bar{\alpha}$.

$$«a = b» \text{ eq } «(a \subset b) \wedge (b \subset a)». \tag{2}$$

Esto es evidente si se considera el sentido que tienen «=» y «$\subset$».

$$«(a = b \cup \bar{b}) \wedge (c = d \cup \bar{d})» \text{ eq } «(a \cap c = d \cup \bar{d})». \tag{3}$$

Demostración. Si «$\alpha = \beta \cup \bar{\beta}$» y «$\gamma = \delta \cup \bar{\delta}$» son verdaderas, tanto α como γ son la clase universal, y por tanto $\alpha \cap \gamma$ será también esta clase. Si, a la inversa, $\alpha \cap \gamma$ es la clase universal, cada una de las clases α y γ ha de ser asimismo la clase universal, puesto que tanto una como otra de aquellas clases (α y γ) contienen por lo menos tantos elementos como $\alpha \cap \gamma$.

Damos algunas otras fórmulas universalmente válidas.

$$a = \bar{\bar{a}} \tag{4}$$

cuya verdad se sigue inmediatamente de la definición de «—».

$$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}. \tag{5}$$

Los elementos de «$\alpha \cup \beta$» son los que pertenecen por lo menos a una de las clases α o β; los elementos de «$\overline{\alpha \cup \beta}$» son por su parte los que no pertenecen ni a la clase α ni a la β, es decir, los que pertenecen a la vez a las clases $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$; pero estos son los elementos de $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$.

$$\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}. \tag{6}$$

Los elementos de $\alpha \cap \beta$ son los que pertenecen simultáneamente a las clases α y β, y por tanto los elementos de $\overline{\alpha \cap \beta}$ son los que por lo menos no pertenecen a una de las clases α o β, o sea los que al menos pertenecen a una de las clases $\bar{\alpha}$ o $\bar{\beta}$: pero tales son los elementos de $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$.

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c). \tag{7}$$

$$(b \cap c) \cup a = (b \cup a) \cap (c \cup a). \tag{8}$$

Como las conexiones «$\cup$» y «$\cap$» son conmutativas, basta cerciorarse de que la primera fórmula tiene validez universal. Los elementos de $\alpha \cup (\beta \cap \gamma)$

son los elementos que poseen la siguiente propiedad: pertenecen a α o pertenecen a la vez a β y a γ; pero desde el punto de vista de la lógica de proposiciones, esto es lo mismo que pertenecer a α o a β y a α o a γ, es decir, que pertenecer a $(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$.

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c). \tag{9}$$

$$(b \cup c) \cap a = (b \cap a) \cup (c \cap a). \tag{10}$$

Debido a la conmutatividad de las conexiones de «$\cup$» y «$\cap$» basta probar (9). Los elementos de $\alpha \cap (\beta \cup \gamma)$ son los que pertenecen por un lado a α y por otra parte por lo menos a una de las dos clases β o γ; o sea, que pertenecen a α y β, o a α y γ, y por tanto son elementos de $(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$.

Presentamos ahora una serie de teoremas acerca de la validez universal de expresiones.

TEOREMA I. Una expresión de una de las formas «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$» es válida universalmente cuando es válida-1, y sólo en este caso. (Esto significa, por lo demás, que se puede demostrar la validez universal del siguiente modo: se transforma la expresión del cálculo de clases en una expresión del cálculo de proposiciones, para lo cual se sustituyen las variables de clase por variables proposicionales y además se escriben «$\wedge$» en lugar de «$\cap$», «$\vee$» en el de «$\cup$», «$\neg$» en el de «—», «$\rightarrow$» en el puesto de «$\subset$» y «$\leftrightarrow$» en el de «$=$»; la valoración de la expresión del cálculo de clases por medio de las sustituciones «0» y «1» de las variables de clase, corresponde exactamente a la evaluación de una expresión del cálculo de proposiciones mediante las sustituciones «$\vee$» y «$\wedge$» para las variables proposicionales; lo mismo ocurre, por otra parte, con todas las expresiones del cálculo de clases en las que la validez universal coincide con la validez-1: se transforma cualquier expresión de este tipo del cálculo de clases, del modo indicado, en otra del cálculo de proposiciones, dejando inalteradas las conexiones proposicionales que se encuentren.)

Demos ahora la demostración del teorema I. Según (1), podemos pasar «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» a la forma equivalente «$\bar{\mathfrak{a}} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cup \bar{\mathfrak{b}}$»; «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$» puede cambiarse en la forma equivalente «$(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a})$» de acuerdo con (2), y en la forma equivalente «$(\bar{\mathfrak{a}} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cup \bar{\mathfrak{b}}) \wedge (\bar{\mathfrak{b}} \cup \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cup \bar{\mathfrak{a}})$» de acuerdo con (1), para lo cual puede escribirse, teniendo en cuenta (3), «$(\bar{\mathfrak{a}} \cup \mathfrak{b}) \cap (\bar{\mathfrak{b}} \cup \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cup \bar{\mathfrak{a}}$»; en cualquiera de los dos casos podemos admitir que nos encontramos con una expresión de la forma «$\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$», que es posible sustituir por la equivalente «$\mathfrak{e} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$», en la que e tendrá una forma especial: pues en e el signo «—» no ha de afectar a ninguno de los signos «$\cup$» y «$\cap$» ni a otro signo «—»; y, además, en e ningún signo «$\cap$» ha de quedar afectado por un signo «$\cup$». La transformación de «$\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$» en «$\mathfrak{e} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$» se lleva a cabo siguiendo las siguientes etapas:

a *1*) en c llevamos el signo «—» lo más hacia el interior que sea posible, para lo cual sustituimos repetidamente, de acuerdo con (5) y (6), todo término parcial «$\overline{\mathfrak{g} \cup \mathfrak{h}}$» por «$\bar{\mathfrak{g}} \cap \bar{\mathfrak{h}}$» y todo término parcial «$\overline{\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}}$» por «$\bar{\mathfrak{g}} \cup \bar{\mathfrak{h}}$» (es indiferente el orden de sucesión de estas transformaciones), mientras algún signo «—» afecte a los «$\cup$» o «$\cap$»;

a 2) al final de las transformaciones efectuadas según a *1*), el signo «—» afectará (posiblemente de un modo múltiple) únicamente a variables de clase; sustituyendo reiteradamente, de acuerdo con (4), $\bar{\mathfrak{a}}$ por *a*, $\bar{\mathfrak{b}}$ por *b*, etc., en el interior de los términos, logramos que el signo «—» se encuentre a lo más una sola vez sobre las variables de clase;

a *3*) hemos de cuidarnos de que ningún signo «$\cap$» se encuentre afectado por un signo «$\cup$» dentro del término que se ha obtenido a partir de c gracias a las transformaciones anteriores; con este objeto sustituimos una y otra vez —teniendo en cuenta (7) y (8)— cada término parcial «$\mathfrak{g} \cup (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{j})$» por «$(\mathfrak{g} \cup \mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{g} \cup \mathfrak{j})$», y cada término parcial «$(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{j}) \cup \mathfrak{g}$» por «$(\mathfrak{h} \cup \mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{j} \cup \mathfrak{g})$», hasta que llegamos a la forma deseada.

En la expresión a que se ha llegado, «$\mathfrak{e} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$», e tiene la forma «$\mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{e}_n$», en la que a su vez cada $\mathfrak{e}_i$ es de la forma «$\mathfrak{f}_1 \cup \mathfrak{f}_2 \cup \ldots \ldots \cup \mathfrak{f}_k$» y las $\mathfrak{f}_j$ son variables de clase colocadas o no bajo una raya de complementariedad (la reorganización por la que se pasa de c a e corresponde exactamente, además, a la que lleva una expresión del cálculo proposicional a su forma normal conyuntiva: cf. cap. I, § 5). De las expresiones «$\mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{e}_k = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$», son universalmente válidas, sin duda alguna, aquéllas en que todo miembro $\mathfrak{e}_i$ tiene la forma «$\mathfrak{g} \cup \bar{\mathfrak{g}} \cup \mathfrak{f}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{f}_k$» (descontando el orden de sucesión de los miembros): pues entonces cada $\mathfrak{e}_i$ representa la clase universal, y e será también dicha clase; pero en caso de que exista una $\mathfrak{e}_i$ que no tenga la forma mencionada, la expresión no será universalmente válida, y por ello tampoco válida-1; si $\mathfrak{e}_i$ es tal miembro, sustituiremos por 0 una variable de clase que aparezca en $\mathfrak{e}_i$ sin afectar por raya de negación, y por 1 una variable afectada por dicha raya, mientras que es indiferente cómo se sustituyan las restantes variables: $\mathfrak{e}_i$ adoptará entonces la forma $0 \cup 0 \cup \ldots \cup 0$, o sea será 0. Puesto que la intersección de una clase cualquiera con la clase nula da lugar a la clase nula, también $\mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{e}_n$ será 0, y $\mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$ será por su parte 1. Por tanto, si la expresión no es universalmente válida no será tampoco válida-1, y el teorema queda demostrado.

Teorema II. Toda expresión de las formas «$\breve{}\,(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b})$» o «$\breve{}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$» es de validez universal cuando, y sólo cuando, es válida-1. Demostración: Puesto que «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» y «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$» se pueden llevar a una forma equivalente «$\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$», es posible escribir «$\breve{}\,(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b})$» y «$\breve{}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$» en la forma «$\breve{}\,(\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}})$». Transformaremos esta última fórmula para obtener expresiones equivalentes, pero de tal modo que en la c transformada no se halle

ningún signo «—» que afecte, ni a otro signo «—» ni a los «$\cap$» y «$\cup$», y además de forma que tampoco se encuentre ningún «$\cup$» afectado por un «$\cap$». Para lograr tal cosa realizamos primero las transformaciones a *1*) y a *2*) mencionadas en la demostración del teorema I; mas en lugar de llevar a cabo la transformación a *3*) ejecutamos la siguiente, a *4*): de acuerdo con (9) y (10), sustituimos reiteradamente todo término «$\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{h} \cup \mathfrak{j})$» por «$(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h}) \cup (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{j})$» y todo término «$(\mathfrak{h} \cup \mathfrak{j}) \cap \mathfrak{g}$» por «$(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}) \cup (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{g})$» hasta llegar a la forma deseada. Con ello la expresión «$\neg (\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}})$» ha pasado a una forma equivalente, «$\neg (\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{e}_n = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}})$», en la que cada $\mathfrak{e}_i$ tiene la forma «$\mathfrak{f}_1 \cap \mathfrak{f}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_k$» y $\mathfrak{f}_i$ son variables de clase dotadas o no de la raya de negación. Supongamos ahora que toda $\mathfrak{e}_i$ esté constituida de tal modo que, entre las $\mathfrak{f}_j$ que pertenecen a ella, aparezca dos veces una y la misma variable, una vez rayada y otra vez sin rayar; como «$\mathfrak{g} \cap \bar{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{f}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_l$» representa siempre la clase nula, «$\mathfrak{e}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{e}_n$», como reunión de clases nulas habrá de ser asimismo la clase nula, y por tanto, por transcribir siempre «$\mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}}$» la clase universal, «$\neg (\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{e}_n = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}})$» será universalmente válida. En cualquier otro caso la expresión dada no sólo no será válida universalmente, sino que tampoco será válida-1. Pues entonces habrá una $\mathfrak{e}_i$ de la forma $\mathfrak{f}_1 \cap \mathfrak{f}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{f}_n$ en la que ninguna $\mathfrak{f}_j$ será igual a una $\bar{\mathfrak{f}}_p$: sustituyamos todas las variables de clase no rayadas que aparecen en $\mathfrak{e}_i$ por 1, y todas las que aparecen rayadas por 0; entonces dicha $\mathfrak{e}_i$ recibirá la forma $1 \cap 1 \cap \ldots \cap 1$, y tendrá por tanto el valor 1, con lo que $\mathfrak{e}_1 \cup \mathfrak{e}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{e}_n$ adoptará también el valor 1: «$\neg (\mathfrak{c} = \mathfrak{d} \cup \bar{\mathfrak{d}})$» toma entonces la forma «$\neg (1 = 1)$», y es falsa.

TEOREMA III. Una expresión de la forma «$\neg \mathfrak{A}_1 \vee \neg \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{A}_n$», en la que las $\mathfrak{A}_i$ tienen la forma «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o la «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$», es universalmente válida si es válida-1, y sólo cuando se cumple esta condición.

Este caso puede reducirse inmediatamente al caso II. Pues una expresión del tipo dado, «$\neg \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{A}_n$», es equivalente a una expresión «$\neg \mathfrak{A}$» en la que $\mathfrak{A}$ tenga a su vez la forma «$\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$»; por lo pronto podemos escribir «$\neg \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{A}_n$» en una forma equivalente, «$\neg (\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d}_1 \cup \bar{\mathfrak{d}}_1) \vee \ldots \vee \neg (\mathfrak{c}_n = \mathfrak{d}_n \cup \bar{\mathfrak{d}}_n)$»; según el cálculo proposicional esta última expresión es equivalente a «$\neg (\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d}_1 \cup \bar{\mathfrak{d}}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{c}_n = \mathfrak{d}_n \cup \bar{\mathfrak{d}}_n)$», y de acuerdo con (3) es equivalente a «$\neg (\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{c}_n = \mathfrak{d}_n \cup \bar{\mathfrak{d}}_n)$».

TEOREMA IV. Una expresión de la forma «$\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$», en la que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tengan la forma «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o la «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$», será válida universalmente si es válida-1 y sólo en este caso.

Podemos suponer de nuevo que la expresión en cuestión tiene la forma «$\neg (\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_1 \cup \bar{\mathfrak{d}}_1) \vee (\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_2 \cup \bar{\mathfrak{d}}_2)$»; afirmamos ahora que la validez universal de esta última expresión es acorde con la validez universal de «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$»; pero si «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» no es universalmente válida, según I tampoco será válida-1: habrá

por tanto una sustitución de las variables de clase por 0 y 1 tal que $\mathfrak{a}$ adopte el valor 1 y $\mathfrak{b}$ el valor 0, pues únicamente «$1 \subset 0$» es falsa; pues bien, con esta sustitución (eventualmente ampliada), «$\neg (\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_1 \cup \mathfrak{d}_1) \vee (\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_2 \cup \mathfrak{d}_2)$» pasa a «$\neg (1=1) \vee (0=1)$» y por ello no es válida-1. Por otro lado, si «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» es universalmente válida, también lo será «$\neg (\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_1 \cup \mathfrak{d}_1) \vee (\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_2 \cup \mathfrak{d}_2)$» —que podemos escribir asimismo en la forma «$(\mathfrak{a}=\mathfrak{d}_1 \cup \mathfrak{d}_1) \rightarrow (\mathfrak{b}=\mathfrak{d}_2 \cup \mathfrak{d}_2)$»— ya que si «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» es válida y $\mathfrak{a}$ es la clase universal, también $\mathfrak{b}$ es la clase universal. Tenemos, por tanto, para la expresión «$\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$» la alternativa siguiente: o es universalmente válida o no es válida-1.

TEOREMA V. Una expresión de la forma «$\neg \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{A}_n \vee \mathfrak{B}$», en la que $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ y $\mathfrak{B}$ tengan la forma «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o la «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$», será universalmente válida cuando, y sólo cuando, sea válida-1.

Este caso se reduce al IV del mismo modo que el III se reduce al II.

En las expresiones siguientes la validez-1 ya no es criterio de la validez universal.

TEOREMA VI. Una expresión de la forma «$\neg \mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{B}_m \vee \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» ($n \geqq 2$), en la que las $\mathfrak{A}_i$ y las $\mathfrak{B}_i$ tengan la forma «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o la «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$», es válida universalmente cuando —y sólo cuando— por lo menos una de las expresiones «$\neg \mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{B}_m \vee \mathfrak{A}_1$», ..., «$\neg \mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \neg \mathfrak{B}_m \vee \mathfrak{A}_n$» tiene validez universal. Teniendo en cuenta la equivalencia recordada en la demostración del teorema III, podemos limitarnos a demostrar el presente teorema únicamente para el caso de ser $m = 1$: queda incluido el caso de $m = 0$, pues la validez universal de «$\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» es la misma que la validez universal de «$\neg (a = a) \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$», del mismo modo que la validez universal de cualquier expresión $\mathfrak{A}_i$ es acorde con la de «$\neg (a = a) \vee \mathfrak{A}_i$».

Demostración. Como es claro que si una de las expresiones «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1$», ..., «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_n$» es universalmente válida también lo será «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$», basta mostrar que «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» no es universalmente válida en caso de que no lo sea ninguna de las expresiones «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1$»; si ocurre esto último, tampoco será válida-1 ninguna de las expresiones «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1$», ..., «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_n$» (según IV). Así pues, para cada «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_i$» existe una sustitución de las variables de clase por 0 y 1 con la cual $\mathfrak{B}$ es verdadera y $\mathfrak{A}_i$ falsa; esta sustitución ha de ampliarse, siempre que sea necesario, de modo que se convierta en una sustitución de todas las variables de clase de «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$».Vamos a designar con Ψ_i la sustitución falsificadora[2] correspondiente a «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_i$» en un campo de individuos formado por un solo elemento. Bajo nuestros supuestos construimos ahora

[2] Es decir, la que convierte en proposición falsa la expresión del caso. (*N. del T.*)

una sustitución de las variables de clase, por clases cuyos elementos pertenezcan al campo $(1, 2, 3, \ldots, n)$, tal que «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» pase a ser una fórmula falsa. Sean $a_1, \ldots, a_k$ las variables de clase existentes; se sustituye cada variable de clase, a_l, por una clase α_l formada con la condición de que contendrá como elemento el número p de $(1, 2, \ldots, n)$ cuando y sólo cuando en Ψ_p esté 1 en lugar de a_l; mediante esta sustitución, los términos de clase que aparecen en «$\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» se convierten en clases determinadas. Afirmamos ahora lo siguiente: para todo término e, la clase correspondiente α_e contiene un número p de $(1, 2, \ldots, n)$ siempre que con la sustitución Ψ_p se haga e igual a 1, y sólo en este caso.

Por lo pronto, tal cosa es cierta cuando se trata de la sustitución de variables de clase, pues hemos definido la sustitución justamente de modo que ocurra así; pero también conviene a los términos más amplios, como podemos demostrar por inducción siguiendo la formación de los términos de clase.

a) Tenga la clase α_e correspondiente al término e, la propiedad arriba afirmada. Entonces la clase $\bar{\alpha}_e$, corresponde al término $\bar{e}$; que $\bar{\alpha}_e$ contenga como elemento el número p significa lo mismo que el que α_e no contenga como elemento este número p; y según la hipótesis esto quiere decir que con la sustitución Ψ_p, e se convierte en 0 y $\bar{e}$ en 1.

b) Admitamos que las clases α_{e_1} y α_{e_2}, correspondientes respectivamente a los términos e_1 y e_2 gozan de la propiedad anterior.

Al término $e_1 \cap e_2$ corresponderá la clase $\alpha_{e_1} \cap \alpha_{e_2}$. Decir que p pertenece a la clase $\alpha_{e_1} \cap \alpha_{e_2}$ significa lo mismo que decir que pertenece a la clase α_{e_1} y y a la clase α_{e_2}; por hipótesis, tal cosa es lo mismo que el que, con la sustitución Ψ_p, tanto e_1 como e_2 se conviertan en 1; pero esto último equivale a que en la sustitución Ψ_p el término $e_1 \cap e_2$ pase a valer 1.

Al término $e_1 \cup e_2$ corresponderá la clase $\alpha_{e_1} \cup \alpha_{e_2}$. Decir que p pertenece a la clase $\alpha_{e_1} \cup \alpha_{e_2}$ significa lo mismo que decir que pertenece por lo menos a una de las clases α_{e_1} o α_{e_2}; de acuerdo con la hipótesis esto quiere decir que, con Ψ_p, por lo menos uno de los términos e_1 o e_2 quedará sustituido por 1, y con ello —en caso de la sustitución Ψ_p— $e_1 \cup e_2$ tendrá por sustitución 1.

Ahora es posible demostrar el teorema VI. Podemos suponer que «$\neg \mathfrak{B}$» tiene la forma «$\neg (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$»; entonces $\mathfrak{B}$ se hará verdadera en toda sustitución Ψ_p, o sea $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ serán ambas 0 ó ambas 1: de aquí se sigue según lo demostrado que, por sustitución en el campo $(1, 2, \ldots, n)$, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ quedan sustituidos por clases tales que cualquier número arbitrario p de $(1, 2, \ldots, n)$ aparece como elemento de ambas clases o falta en las dos —y por ello, al sustituir en $(1, 2, \ldots, n)$, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dan lugar a clases iguales, y $\neg \mathfrak{B}$ es falsa. Supongamos ahora cierto $\mathfrak{A}_i$ que podamos suponer de la forma $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$; con la sustitución Ψ_i, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ será falsa, es decir, tendrá una de las formas $0 = 1$

o $1 = 0$; según el teorema demostrado, esto significa que al sustituir en $(1, 2, \ldots, n)$, c y $\mathfrak{d}$ se convierten, respectivamente, en unas clases γ y δ tales que si el elemento i falta en γ existe en δ, y a la inversa: luego las clases γ y δ son diferentes, y al sustituir en $(1, 2, \ldots, n)$ $\mathfrak{A}_i$ se hará falsa. Por ello la expresión «$\neg\, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» se transformará en una proposición falsa con nuestra sustitución, y no será universalmente válida, pues no es válida-n. Con lo cual hemos demostrado el teorema VI.

Teorema VII. Estamos ahora capacitados para atacar el problema de la validez universal de una expresión cualquiera. Toda expresión consta de expresiones elementales de las formas «$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$» o «$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$», enlazadas en conexiones proposicionales. Eliminamos de la expresión las conexiones de «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$», para lo cual utilizamos las equivalencias de «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$» con «$\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$» y de «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$» con «$(\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{B})$». En lo que se refiere a las expresiones elementales, construimos las formas normales conyuntivas del cálculo proposicional; la expresión adopta entonces la forma «$\mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2 \wedge \ldots \wedge \wedge \mathfrak{C}_q$», y es universalmente válida cuando todas las expresiones $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_q$ lo son, y sólo en este caso; pero cada una de las expresiones $\mathfrak{C}_i$ tiene una de las formas a que nos hemos referido en I a VI, de suerte que podemos demostrar la validez universal de todas ellas.

Demos ahora algunos ejemplos.

1. Habíamos visto que la fórmula «$(a = a \cup \bar{a}) \vee (a = a \cap \bar{a})$» no es universalmente válida. Según VI tendría validez universal únicamente si por lo menos una de las expresiones «$a = a \cup \bar{a}$» o «$a = a \cap \bar{a}$» fuese universalmente válida, o sea, teniendo en cuenta I, si una de estas fórmulas fuese válida-1; pero no ocurre así, ya que la primera se tornará falsa cuando se sustituya a por 0, y a la segunda le ocurrirá lo mismo cuando se sustituya a por 1.

2. Al final del § 1 habíamos planteado la cuestión acerca de si «$(\alpha \subset \beta) \wedge \wedge (\beta \subset \gamma) \rightarrow (\alpha \subset \gamma)$» es verdadera por razones puramente lógicas: tal cosa significaría que «$(a \subset b) \wedge (b \subset c) \rightarrow (a \subset c)$» sería universalmente válida; de hecho es así. Por desarrollo en la forma normal conyuntiva se muestra que esta fórmula pertenece al tipo tratado en V, y que por tanto es universalmente válida cuando es válida-1 y sólo en este caso. Mas podemos demostrar su validez-1 (de un modo algo abreviado): por un lado, si en una sustitución «$a \subset c$» pasa a ser una fórmula verdadera, la fórmula completa también será verdadera; por otro, «$a \subset c$» puede ser falsa únicamente cuando a y c se sustituyan, respectivamente, por 1 y 0; pero si en este momento sustituimos b por 0 obtenemos «$(1 \subset 0) \wedge (0 \subset 0) \rightarrow (1 \subset 0)$», o sea «$\wedge \wedge \vee \rightarrow \wedge$», es decir, «$\vee$»; si en vez de esto sustituimos b por 1 llegamos a «$(1 \subset 1) \wedge (1 \subset 0) \rightarrow \rightarrow (1 \subset 0)$», que también se reduce a «$\vee$». Se puede asimismo aprovechar la observación hecha en el teorema I, o sea retrotraer la validez universal de

«$(a \subset b) \wedge (b \subset c) \rightarrow (a \subset c)$» a la de la expresión del cálculo de proposiciones «$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$».

3. En el segundo ejemplo dado al terminar el § 1, se trataba de si la expresión «$(c \subset a \cap b) \wedge (a \subset c) \wedge (b \subset c) \rightarrow (c \subset a) \wedge (c \subset b)$» era válida universalmente. El desarrollo en forma conyuntiva normal lleva al resultado de que tal expresión será universalmente válida cuando, y sólo cuando, lo sean las dos expresiones «$(c \subset a \cap b) \wedge (a \subset c) \wedge (b \subset c) \rightarrow (c \subset a)$» y «$(c \subset a \cap b) \wedge$ $\wedge (a \subset c) \wedge (b \subset c) \rightarrow (c \subset b)$», es decir, cuando ambas sean válidas-1; y estas expresiones tienen validez-1, como puede demostrarse por nuestro método. En lugar de este procedimiento basta también demostrar la validez universal de las fórmulas proposicionales «$(C \rightarrow A \wedge B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$» y «$(C \rightarrow A \wedge B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow B)$».

4. En el tercer ejemplo del final del § 1 nos tropezamos con si la expresión «$(a \cap \bar{b}) \subset (a \cup \bar{c}) \cup (c \cap \bar{b})$» era de validez universal, lo cual nos remite, según I, a si esta expresión es válida-1; por tanto, basta demostrar que «$(A \wedge \overline{\ } B) \rightarrow (A \wedge \overline{\ } C) \vee (C \wedge \overline{\ } B)$» es universalmente válida, de lo cual puede uno convencerse del modo sabido.

Una vez que hemos resuelto el problema de la validez universal en el cálculo de clases, podemos responder también, análogamente a como se hace en el cálculo de proposiciones, a la pregunta acerca de cuándo se sigue lógicamente, de determinadas proposiciones $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ sobre clases concretas, otra proposición Ξ acerca de estas mismas clases. Esto ocurre, siempre y únicamente, en el caso de que $\Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_n \rightarrow \Xi$ se obtenga por reemplazamiento en una fórmula universalmente válida del cálculo de clases.

Este resultado indica la importancia central que posee el problema de la validez universal, lo mismo aquí que en el cálculo proposicional; esta cuestión, que hemos resuelto completamente en los dos cálculos expuestos, se conoce con el nombre de *problema de la decidibilidad* [3]. El problema de la *cumplibilidad* de expresiones, que ya hemos mencionado en lo que respecta al cálculo proposicional, es dual del problema de la validez universal de las expresiones. Se llama cumplible en cierto campo de individuos una expresión del cálculo de clases, cuando existe una sustitución de las variables de clase (por clases formadas con elementos de dicho campo de individuos) tal que la expresión se transforma en una proposición verdadera; en particular, hablamos de cumplibilidad-1, cumplibilidad-2, etc., de una expresión; una expresión es cumplible en un campo de individuos cuando, y sólo cuando, no es válida en este campo la negación de aquella expresión. Se dice que una

[3] No decimos «problema de la decisión», como sería necesario literalmente, pues creemos que conviene reservar el último nombre para las importantes cuestiones anejas a la teoría de juegos que se conocen por «teoría de la decisión». (*N. del T.*)

expresión del cálculo de clases es simplemente cumplible cuando existe un campo de individuos no vacío en el cual es cumplible; una expresión es cumplible siempre y solamente cuando dicha expresión negada no es universalmente válida. Debido a tal hecho se denomina también como problema de la decidibilidad el problema de la cumplibilidad de una expresión.

Desde un punto de vista histórico es digno de mención que el cálculo de clases viene ya de G. BOOLE (confróntese la reimpresión de [2]). El problema de la decidibilidad en este cálculo fue resuelto primeramente por L. LÖWENHEIM [3] siguiendo los trabajos previos de E. SCHRÖDER [4]. TH. SKOLEM [5] y H. BEHMANN [1] han dado soluciones de forma más precisa y luego han aparecido diversas variantes de la solución.

§ 3. Derivación sistemática de los silogismos aristotélicos tradicionales

Vamos a ocuparnos más de cerca ahora de la doctrina tradicional de la deducción, que tiene interés particularmente desde el punto de vista histórico. Se trata de saber cómo se integran en nuestro cálculo de clases las clásicas figuras aristotélicas del silogismo (o al menos procedentes en parte de ARISTÓTELES) y cómo pueden sistematizarse y fundamentarse desde la perspectiva de dicho cálculo.

Las propiedades características de los razonamientos deductivos que vamos a considerar son las que siguen. Constan de tres enunciados, de los cuales el tercero (la conclusión) es consecuencia lógica de los dos primeros (las premisas). Cada uno de los tres enunciados tiene una de estas cuatro formas:

«todos los *A* son *B*» (juicio universal afirmativo),
«algunos *A* son *B*» (juicio particular afirmativo),
«ningún *A* es *B*» (juicio universal negativo),
«algunos *A* no son *B*» (juicio particular negativo).

Hemos de entender que con *A* y *B* se simbolizan propiedades. Se suelen usar las vocales *a, i, e, o* (en este orden) para designar abreviadamente las cuatro formas citadas sucesivamente [4]. Podemos servirnos del símbolo *AB* para referirnos a uno cualquiera de los cuatro tipos de juicios.

En los tres enunciados agrupados entran en total tres conceptos, el concepto sujeto (S), el concepto predicado (P) y el concepto medio (M) [5]; la conclusión tiene la forma SP, y de las premisas la primera contiene los con-

---

[4] Son las dos primeras vocales de cada una de las palabras latinas *affirmo* y *nego*. (*N. del T.*)

[5] A estos conceptos se les llama tradicionalmente (en este orden) término menor, término mayor y término medio. (*N. del T.*)

ceptos M y P, y la segunda [6] los M y S. Obsérvese que el orden de sucesión de S y P fijado en la conclusión no representa restricción alguna de la generalidad, pues a partir de una cualquiera de las figuras del silogismo que siguen se llegaría siempre a una figura que tuviese PS como conclusión por mero cambio de designación e inversión del orden de las premisas; por tanto se encuentran las siguientes cuatro figuras fundamentales de silogismos:

MP	PM	MP	PM
SM	SM	MS	MS
SP	SP	SP	SP

Como en cada una de las cuatro figuras cada uno de los tres enunciados tiene cuatro posibilidades —correspondientes a su pertenencia a una de las cuatro formas de juicio, *a, i, e* y *o*—, desde un punto de vista puramente combinatorio se puede pensar en 256 tipos diferentes de silogismos; pero la exigencia de que la conclusión ha de seguirse de las premisas limita considerablemente el número de posibilidades; la lógica aristotélica enseña que hay 19 modos diferentes admisibles de silogismos, para los que se han introducido palabras mnemotécnicas de tres sílabas, en las que las vocales dan la sucesión de las formas de juicio que constituyen los tres enunciados del silogismo. Con este sistema de nombrar se llega al siguiente conjunto de figuras aristotélicas del silogismo:

1.ª figura	2.ª figura	3.ª figura	4.ª figura
barbara	cesare	datisi	calemes
celarent	camestres	feriso	fresison
darii	festino	disamis	dimatis
ferio	baroco	bocardo	bamalip
		darapti	fesapo
		felapton	

Vamos a comprobar, con ayuda del cálculo de clases, si esta lista de silogismos contiene realmente todos los modos posibles de las formas descritas.

Daremos, en primer término, la representación simbólica de las cuatro formas, *a, i, e* y *o*, de un juicio. En el § 1 habíamos mencionado ya el juicio «todos los *A* son *B*»; si α y β son las clases respectivamente correspondientes a *A* y *B*, este juicio se transcribirá por «$\alpha \subset \beta$». Podemos expresar el juicio «algunos *A* son *B*» de la forma siguiente: «no es verdad que todos los *A* no

[6] Tradicionalmente llamadas premisa mayor y premisa menor, respectivamente. (*N. del T.*)

sean *B*», que se representa simbólicamente por «$\neg(\alpha \subset \bar{\beta})$». En lugar de «ningún *A* es *B*» podemos decir también «todos los *A* no son *B*», y traducir esto último por «$\alpha \subset \bar{\beta}$». Finalmente, es posible decir «no es verdad que todos los *A* sean *B*» en vez de «algunos *A* no son *B*», y escribir «$\neg(\alpha \subset \beta)$».

Con esta forma de escribir se obtienen directamente las doctrinas tradicionales, concernientes a las formas de jucio consideradas, acerca de la *contraposición (oposición) y la conversión;* pues de los cuatro juicios, el último es el opuesto del primero, y el segundo el opuesto del tercero, según están escritos; además, los dos juicios intermedios son simétricos en *A* y *B*, es decir, en nuestro sistema, en α y β: por ello, los dos juicios «$\neg(\alpha \subset \bar{\beta})$» y y «$\alpha \subset \bar{\beta}$» son equivalentes, respectivamente, a los dos, «$\neg(\beta \subset \bar{\alpha})$» y «$\beta \subset \bar{\alpha}$».

Si designamos ahora con σ, π y μ las clases respectivamente correspondientes al concepto sujeto, S, al concepto predicado, P, y al concepto medio, M, la primera premisa de la *primera figura* tendrá una de las cuatro formas,

$$\text{«}\mu \subset \pi\text{»}, \quad \text{«}\neg(\mu \subset \bar{\pi})\text{»}, \quad \text{«}\mu \subset \bar{\pi}\text{»}, \quad \text{«}\neg(\mu \subset \pi)\text{»},$$

la segunda premisa una de estas cuatro,

$$\text{«}\sigma \subset \mu\text{»}, \quad \text{«}\neg(\sigma \subset \bar{\mu})\text{»}, \quad \text{«}\sigma \subset \bar{\mu}\text{»}, \quad \text{«}\neg(\sigma \subset \mu)\text{»},$$

mientras que la conclusión habrá de ser de una de las formas,

$$\text{«}\sigma \subset \pi\text{»}, \quad \text{«}\neg(\sigma \subset \bar{\pi})\text{»}, \quad \text{«}\sigma \subset \bar{\pi}\text{»}, \quad \text{«}\neg(\sigma \subset \pi)\text{»}.$$

Se trata ahora de saber qué combinación de premisas tendrá como consecuencia una de las conclusiones posibles; pero esto es fácil de establecer: por ejemplo, de las premisas «$\mu \subset \pi$» y «$\sigma \subset \mu$» se concluye «$\sigma \subset \pi$», ya que «$(a \subset b) \wedge (c \subset a) \rightarrow (c \subset b)$» es una fórmula universalmente válida del cálculo de clases. Si se comprueban todas las combinaciones de premisas en lo que respecta a la validez universal de las fórmulas correspondientes del cálculo de clases, se encuentra que únicamente dan deducciones válidas las siguientes combinaciones:

$$\frac{\begin{array}{l}\mu \subset \pi \\ \sigma \subset \mu\end{array}}{\sigma \subset \pi} \quad \text{(barbara)} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mu \subset \pi \\ \neg(\sigma \subset \bar{\mu})\end{array}}{\neg(\sigma \subset \bar{\mu})} \quad \text{(darii)}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\mu \subset \bar{\pi} \\ \sigma \subset \mu\end{array}}{\sigma \subset \bar{\pi}} \quad \text{(celarent)} \qquad \frac{\begin{array}{l}\mu \subset \bar{\pi} \\ \neg(\sigma \subset \bar{\mu})\end{array}}{\neg(\sigma \subset \pi)} \quad \text{(ferio)}$$

En la *segunda figura* entran en cuestión las posibilidades siguientes para la primera premisa,

$$«\pi \subset \mu», \quad «\neg(\pi \subset \bar{\mu})», \quad «\pi \subset \bar{\mu}», \quad «\neg(\pi \subset \mu)»$$

mientras que para la segunda premisa y la conclusión existen las mismas formas posibles que en la primera figura; la prueba de las posibles agrupaciones combinatorias lleva a los siguientes modos válidos de silogismos:

$$\frac{\pi \subset \bar{\mu} \quad \sigma \subset \mu}{\sigma \subset \bar{\pi}} \text{ (cesare)} \qquad \frac{\pi \subset \mu \quad \sigma \subset \bar{\mu}}{\sigma \subset \bar{\pi}} \text{ (camestres)}$$

$$\frac{\pi \subset \bar{\mu} \quad \neg(\sigma \subset \bar{\mu})}{\neg(\sigma \subset \pi)} \text{ (festino)} \qquad \frac{\pi \subset \mu \quad \neg(\sigma \subset \mu)}{\neg(\sigma \subset \pi)} \text{ (baroco)}$$

En la *tercera figura* las posibilidades que se han de considerar para la primera premisa son

$$«\mu \subset \pi», \quad «\neg(\mu \subset \bar{\pi})», \quad «\mu \subset \bar{\pi}», \quad «\neg(\mu \subset \pi)»$$

y para la segunda,

$$«\mu \subset \sigma», \quad «\neg(\mu \subset \bar{\sigma})», \quad «\mu \subset \bar{\sigma}», \quad «\neg(\mu \subset \sigma)»$$

mientras que se cuenta con las mismas posibilidades para la conclusión que en la primera figura; al examinar la validez universal de las expresiones correspondientes del cálculo de clases se encuentra que sólo dan modos válidos de silogismos las combinaciones siguientes:

$$\frac{\mu \subset \pi \quad \neg(\mu \subset \bar{\sigma})}{\neg(\sigma \subset \bar{\pi})} \text{ (datisi)} \qquad \frac{\mu \subset \bar{\pi} \quad \neg(\mu \subset \bar{\sigma})}{\neg(\sigma \subset \pi)} \text{ (feriso)}$$

$$\frac{\neg(\mu \subset \bar{\pi}) \quad \mu \subset \sigma}{\neg(\sigma \subset \bar{\pi})} \text{ (disamis)} \qquad \frac{\neg(\mu \subset \pi) \quad \mu \subset \sigma}{\neg(\sigma \subset \pi)} \text{ (bocardo)}$$

Finalmente, en la *cuarta figura* se trata de las formas siguientes para la primera premisa

$$«\pi \subset \mu», \quad «\neg(\pi \subset \bar{\mu}), \quad «\pi \subset \bar{\mu}», \quad «\neg(\pi \subset \mu)$$

y de estas otras para la segunda premisa,

$$«\mu \subset \sigma», \quad «\overline{\ } (\mu \subset \bar{\sigma})», \quad «\mu \subset \bar{\sigma}», \quad «\overline{\ } (\mu \subset \sigma)»$$

al mismo tiempo que se cuenta con las mismas posibilidades que en las demás figuras en lo que se refiere a la conclusión; de la manera indicada se hallan los siguientes modos de silogismos:

$$\begin{array}{l} \pi \subset \mu \\ \mu \subset \bar{\sigma} \\ \hline \sigma \subset \bar{\pi} \end{array} \quad \text{(calemes)} \qquad \begin{array}{l} \pi \subset \bar{\mu} \\ \overline{\ } (\mu \subset \bar{\sigma}) \\ \hline \overline{\ } (\sigma \subset \pi) \end{array} \quad \text{(fresison)}$$

$$\begin{array}{l} \overline{\ } (\pi \subset \bar{\mu}) \\ \mu \subset \sigma \\ \hline \overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi}) \end{array} \quad \text{(dimatis)}$$

Hemos encontrado, pues, 15 modos válidos del silogismo, que se encuentran en la lista clásica de los mismos.

Por otra parte, estos modos de silogismo se pueden llevar a dos tipos principales —«barbara» y «darii»— cuando se tiene en cuenta que «$\alpha \subset \bar{\beta}$» enuncia lo mismo que «$\beta \subset \bar{\alpha}$», que «$\overline{\ } (\alpha \subset \bar{\beta})$» es lo mismo que «$\overline{\ } (\beta \subset \bar{\alpha})$» y además que $\bar{\bar{\alpha}}$ es idéntico a α. El silogismo «celarent» es un caso especial de «barbara» en el que se sustituye π por $\bar{\pi}$. Cuando en «cesare» se reemplaza la premisa «$\pi \subset \bar{\mu}$» por «$\mu \subset \bar{\pi}$», se llega según «barbara» a «$\sigma \subset \bar{\pi}$». En «camestres» se toma en lugar de la premisa «$\sigma \subset \bar{\mu}$» esta otra, «$\mu \subset \bar{\sigma}$», y se obtiene de acuerdo con «barbara» «$\pi \subset \bar{\sigma}$», que es lo mismo que «$\sigma \subset \bar{\pi}$». En «calemes» se extrae de las premisas, según «barbara», «$\pi \subset \bar{\sigma}$», que es igual que «$\sigma \subset \bar{\pi}$». A partir de las premisas de «ferio», y de acuerdo con «darii», se llega a «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$», idéntico a «$\overline{\ } (\sigma \subset \pi)$». En «festino» la primera premisa puede escribirse «$\mu \subset \bar{\pi}$», con lo que se tiene el silogismo «ferio». En lugar de las premisas de «baroco» podemos escribir «$\bar{\mu} \subset \bar{\pi}$» y «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\mu})$», con lo que llegamos de acuerdo con «darii» a «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$», igual a «$\overline{\ } (\sigma \subset \pi)$». En «datisi», escribamos en vez de la segunda premisa «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\mu})$»: tendremos, según «darii», «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$». Si en «feriso» escribimos en lugar de la segunda premisa «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\mu})$», llegamos de acuerdo con «darii» a «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$», es decir, a «$\overline{\ } (\sigma \subset \pi)$». Escribamos en el puesto de la primera premisa de «disamis», «$\overline{\ } (\pi \subset \bar{\mu})$»: encontraremos de acuerdo con «darii», «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$». Reemplazando en «bocardo» la primera premisa por «$\overline{\ } (\bar{\pi} \subset \bar{\mu})$» obtenemos, por «darii», «$\overline{\ } (\bar{\pi} \subset \bar{\sigma})$», o sea «$\overline{\ } (\sigma \subset \pi)$». Al escribir en lugar de la primera premisa de «fresison», «$\mu \subset \bar{\pi}$», y en el puesto de la segunda «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\mu})$», se llega de acuerdo con «darii» a «$\overline{\ } (\sigma \subset \bar{\pi})$», es decir, a «$\overline{\ } (\sigma \subset \pi)$». Por fin, partiendo de las premisas de

«dimatis» y concluyendo según «darii» se obtiene «$\overline{}(\pi \subset \bar{\sigma})$», que es lo mismo que «$\overline{}(\sigma \subset \bar{\pi})$».

Nos ocuparemos ahora de los modos aristotélicos «darapti», «felapton», «bamalip» y «fesapo», que no hemos encontrado con nuestro proceso; estos modos eran:

$$\frac{\mu \subset \pi \quad \mu \subset \sigma}{\overline{}(\sigma \subset \bar{\pi})} \text{ (darapti)} \qquad \frac{\mu \subset \bar{\pi} \quad \mu \subset \sigma}{\overline{}(\sigma \subset \pi)} \text{ (felapton)}$$

$$\frac{\pi \subset \mu \quad \mu \subset \sigma}{\overline{}(\sigma \subset \bar{\pi})} \text{ (bamalip)} \qquad \frac{\pi \subset \bar{\mu} \quad \mu \subset \sigma}{\overline{}(\sigma \subset \pi)} \text{ (fesapo)}$$

Con razón no hemos citado estos modos del silogismo, ya que ninguna de las expresiones

$$«(a \subset b) \wedge (a \subset c) \to \overline{}(c \subset \bar{b})», \quad «(a \subset \bar{b}) \wedge (a \subset c) \to \overline{}(c \subset b)»,$$
$$«(a \subset b) \wedge (b \subset c) \to \overline{}(c \subset \bar{a})» \text{ y } «(a \subset \bar{b}) \wedge (b \subset c) \to \overline{}(c \subset a)»$$

es universalmente válida.

Esta discrepancia procede de que la interpretación que se ha hecho tradicional desde ARISTÓTELES de los enunciados universales positivos («todos los *A* son *B*»), no está de perfecto acuerdo con nuestra interpretación de la fórmula «$\alpha \subset \beta$». Pues, según ARISTÓTELES, la proposición «todos los *A* son *B*» es verdadera únicamente cuando existen objetos que son *A*; por el contrario, «$\alpha \subset \beta$» es verdadera incluso si α es la clase nula. Nuestra divergencia con ARISTÓTELES en este punto está justificada, por ejemplo, si se consideran las aplicaciones matemáticas de la lógica, en las que el supuesto aristotélico sería improcedente; pero también fuera de la matemática, en el pensamiento lógico ligado al lenguaje, se emplean frecuentemente enunciados de la forma «todos los *A* son *B*» sin saber si existen objetos con la propiedad *A* —en realidad se utiliza corrientemente en tales casos la forma lingüística «todos los *A* serían *B*», como ocurre, p. ej., cuando se quiere por reducción al absurdo demostrar que no existen objetos con la propiedad *A*. En todo caso tenemos con nuestra concepción mayores posibilidades de deducción.

Por otra parte, no ha de pensarse que en nuestro caso se pierden enteramente los modos de silogismo «darapti», «felapton», «bamalip» y «fesapo»; por el contrario, basta añadir el supuesto aristotélico implícito como premisa

suplementaria y se consigue que tales modos sean también válidos en nuestro sistema; esto se puede llevar a cabo, por ejemplo, de la siguiente manera:

$$\frac{\begin{array}{c}\mu \subset \pi \\ \mu \subset \sigma \\ \neg\,(\mu \subset \bar{\mu})\end{array}}{\neg\,(\sigma \subset \bar{\pi})} \qquad \frac{\begin{array}{c}\mu \subset \bar{\pi} \\ \mu \subset \sigma \\ \neg\,(\mu \subset \bar{\mu})\end{array}}{\neg\,(\sigma \subset \pi)} \qquad \frac{\begin{array}{c}\pi \subset \mu \\ \mu \subset \sigma \\ \neg\,(\pi \subset \bar{\pi})\end{array}}{\neg\,(\sigma \subset \bar{\pi})} \qquad \frac{\begin{array}{c}\pi \subset \bar{\mu} \\ \mu \subset \sigma \\ \neg\,(\mu \subset \bar{\mu})\end{array}}{\neg\,(\sigma \subset \pi)}$$

Es un error muy extendido en los círculos filosóficos el de que el campo de los modos de deducción lógica se agota completamente con el cálculo de clases, o si queremos, con la lógica tradicional. No es posible admitir tal cosa en modo alguno, como podremos convencernos en el próximo capítulo.

Ejercicios del capítulo segundo

1. Considérese el siguiente enunciado: «si las convicciones teóricas son independientes de la voluntad, y si no es posible forzar por medio de leyes penales lo que es independiente de la voluntad, entonces no se pueden forzar las convicciones teóricas por medio de leyes penales».

a) Introdúzcanse signos (letras minúsculas griegas) para simbolizar las clases que aparecen en dicho enunciado, y formúlese éste con ayuda de nuestro simbolismo.

b) Estudiése si el enunciado es verdadero por razones puramente lógicas.

2. El llamado *teorema hauberiano* dice así: «si una clase α se subdivide en las clases parciales β_1, β_2, β_3, y por otra parte también en las clases parciales γ_1, γ_2, γ_3, y si estas últimas subclases son disyuntivas entre sí —es decir, si dos cualesquiera de estas clases no poseen ningún elemento común— y si, además, las clases β_1, β_2, β_3 están contenidas en las clases γ_1, γ_2, γ_3, entonces las clases γ_1, γ_2, γ_3 están asimismo contenidas en las clases β_1, β_2, β_3.

Formúlese simbólicamente este teorema y muéstrese que representa un enunciado universalmente válido del cálculo de clases.

3. Considérense los siguientes enunciados en broma, formulados por LEWIS CARROLL:

a) Los únicos animales de esta casa son gatos.

b) Todo animal que echa ojeadas con gusto a la luna vale para animal faldero.

c) Cuando aborrezco un animal le hago apartarse de mi camino.

d) Solamente son carnívoros los animales merodeadores nocturnos.

e) Todo gato mata ratones.

f) Los animales de esta casa son los únicos que me pueden aguantar.

g) Los canguros no valen para animales falderos.

h) Unicamente los carnívoros matan ratones.

i) Aborrezco los animales que no me pueden aguantar.

j) Los animales merodeadores nocturnos echan ojeadas con gusto a la luna.

Muéstrese que de estos 10 enunciados *a*) . . . *j*) se sigue lógicamente este otro: «hago apartarse de mi camino a los canguros».

4. En las matemáticas, un conjunto M con dos conexiones diádicas (que generalmente se simbolizan con «$\cap$» y «$\cup$», sin que estos signos hayan de tener necesariamente el sentido especial que les hemos atribuido en el cálculo de clases) se llama una *asociación* en lo que se refiere a dichas conexiones, cuando se cumple lo siguiente:

1. Si se ponen en conexión dos elementos de M mediante «$\cap$» o «$\cup$», se obtiene de nuevo un elemento de M.

2. Si a, b y c son elementos cualesquiera de M, son válidos los siguientes enunciados:

2a) $a \cap b = b \cap a$ 2b) $a \cup b = b \cup a$

2c) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$ 2d) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$

2e) $a \cap (a \cup b) = a$ 2f) $a \cup (a \cap b) = a$

Llamamos además distributiva a una asociación cuando se cumple por añadidura la siguiente ley:

2g) $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

α) Demuéstrese que las clases formadas con elementos de un campo de individuos componen un conjunto que forma una asociación distributiva con relación a las conexiones «$\cap$» y «$\cup$» (esta vez en el sentido adoptado en el cálculo de clases), y esto aun cuando se conmuten los significados de «$\cap$» y «$\cup$».

β) ¿En relación con qué conexiones proposicionales forman las proposiciones una asociación?

CAPÍTULO III

EL CALCULO RESTRINGIDO DE PREDICADOS

§ 1. Insuficiencia del cálculo estudiado hasta ahora

El cálculo de clases ha permitido un tratamiento más sistemático de las cuestiones lógicas que la lógica tradicional. Mas por otro lado puede decirse que, desde el punto de vista de las posibilidades de extraer consecuencias lógicas, ambos métodos se han comportado de modo esencialmente igual: las deducciones más complicadas que son posibles en el cálculo de clases pueden obtenerse también en su mayoría mediante una aplicación reiterada de los modos aristotélicos del silogismo.

En opinión de los primeros lógicos, opinión compartida también por KANT, la lógica (la lógica deductiva) quedaba en términos generales agotada con la doctrina aristotélica de la deducción; KANT decía (en el prólogo a la 2.ª edición de la «Crítica de la razón pura»): «es digno de atención en ella (la lógica) que desde ARISTÓTELES hasta ahora no ha podido dar ningún paso hacia adelante y que asimismo todo parece indicar que está cerrada y completa».

En realidad ocurre que el formalismo aristótelico manifiesta ser insuficiente ya en el caso de combinaciones lógicas bastante sencillas. Si un enunciado como «si cualquier número primo distinto de 2 es impar, y si los números primos mayores que 11 son distintos de 2, entonces los números primos mayores que 11 son impares» es verdadero por razones puramente lógicas —en él se expresa el silogismo «barbara»— no debe serlo menos el siguiente enunciado: «si hay un presidente de todas las asociaciones de una ciudad, cada asociación de dicha ciudad tiene un presidente». También aquí se reconoce el carácter puramente lógico del enunciado en que el contenido de los conceptos «presidente» y «asociación de la ciudad» es enteramente indiferente para la verdad del enunciado; pero no somos capaces de expresar lo característico de este enunciado mediante la lógica tradicional ni con ayuda del

cálculo de clases. La razón de esto es que no se trata ahora de ciertas propiedades, sino de las relaciones entre diversos objetos. El concepto «presidente» contiene una de tales relaciones, a saber, la existente entre una persona y una asociación; pero hasta ahora no tenemos medios de expresar simbólicamente dichas relaciones.

Ahora bien, las relaciones desempeñan el papel más esencial en la construcción lógica de las matemáticas. Unicamente pudo subsistir el error de que la lógica tradicional bastaba para construir lógicamente las matemáticas a partir de sus fundamentos, porque antes de FREGE y PEANO nadie había emprendido un análisis total de los modos deductivos empleados en la matemática. En los libros antiguos de lógica se encuentran sin duda suficientes ejemplos de aplicación de las figuras tradicionales del silogismo en la matemática, incluso de un conjunto complicado de ellas, pero nunca se descompone en todas sus particularidades la demostración de ningún teorema matemático de importancia. Vamos a destacar la importancia de las relaciones en las matemáticas por medio de un ejemplo sencillo. Consideremos el enunciado de la geometría elemental: «si B se encuentra entre A y C, B se encuentra también entre C y A» (ha de entenderse que A, B y C son puntos cualesquiera de una recta determinada). Si designamos con Φ el enunciado «B se encuentra entre A y C», y con Ψ, «B se encuentra entre C y A», podemos transcribir formalmente el enunciado original por «$\Phi \rightarrow \Psi$», pero con ello no quedaría expresa la universalidad que reside en tal enunciado acerca de A, B y C. La fórmula empleada podría servir, a lo más, en caso de que A, B y C fuesen puntos perfectamente determinados de la recta.

Por medio del cálculo de clases podemos, verdaderamente, formular aserciones generales, tales como —en este caso—: «si un punto tiene la propiedad de encontrarse entre A y C, entonces tiene también la propiedad de encontrarse entre C y A». Si α fuese la clase de las cosas dotadas de la propiedad de encontrarse entre A y C, y β la clase de las cosas dotadas de la propiedad de encontrarse entre C y A, sería posible traducir el enunciado por «$\alpha \subset \beta$». Pero la generalidad se refiere aquí solamente al punto B, no a los puntos A y C, que habíamos tenido que considerar únicamente como puntos determinados: de modo que no somos capaces de expresar simbólicamente de un modo adecuado este enunciado, que mantiene de un modo enteramente general la simetría de la relación «entre». Justamente por esta razón no hay posibilidad, en modo alguno, de extraer las consecuencias lógicas de tal enunciado.

Pero no es sólo la consideración de las matemáticas la que nos obliga a introducir una lógica de las relaciones, como ya nos había indicado el primer ejemplo. Ciertamente, «si hay un hijo, entonces hay un padre» es una aserción evidente, y podemos exigir a un cálculo lógico que haya de satisfacernos que aclare esta evidencia como consecuencia de principios lógicos sencillos; pero no ocurre así, en absoluto, con lo que hemos estudiado hasta ahora. «Ser

padre» y «ser hijo» son, desde luego, propiedades, pero el enlace existente entre ambas se pone de manifiesto únicamente cuando se tiene en cuenta que las dos proceden de una relación que las fundamenta. La relación existente entre x e y que se representa mediante el enunciado «x, como varón, tiene a y por hijo», es sólo otra expresión de «x es el padre de y»; por otra parte, este mismo enunciado puede presentarse del siguiente modo: «y es hijo de (el varón) x». Por tanto, el enunciado a que nos estamos refiriendo puede patentizarse como evidente únicamente si «ser padre» y «ser hijo» no se conciben en primer lugar como propiedades, sino como relaciones entre dos personas, de modo que los enunciados elementales no serán ya «x es padre» y «x es hijo», sino «x es padre de y» y «x es hijo de y». Los enunciados «x es padre» y «x es hijo» se expresan por medio de tales enunciados elementales de las siguientes maneras, respectivamente: «existe un y tal que x es el padre de y», y «existe un (varón) y tal que x es hijo de y»; en estos dos enunciados se indican ciertas propiedades de x, pero se definen a partir de las relaciones entre dos personas. Podríamos mostrar por medio del formalismo que hemos de desarrollar que se puede pasar de uno a otro de los dos últimos enunciados en virtud de los principios lógicos.

§ 2. Consideraciones metódicas fundamentales del cálculo de predicados

Puesto que el cálculo estudiado hasta ahora ha revelado ser insuficiente, nos vemos forzados a intentar una ampliación de nuestro simbolismo lógico. Para ello retrocedemos de nuevo al punto de nuestras consideraciones a partir del cual comenzamos el cálculo proposicional. Vimos allí que muchas proposiciones se apoyan en que se atribuye a cierto objeto una propiedad; pero no hemos aprovechado completamente esta descomposición de las proposiciones, ya que, si bien hemos introducido las propiedades (en forma de las clases correspondientes) en el cálculo, no hemos hecho lo mismo con los objetos. Vamos a completar el cálculo desde este punto de vista, para lo cual discriminaremos en la representación de proposiciones entre los *objetos* (*individuos*) y las *propiedades* (*predicados*) que de ellos se enuncian, e indicaremos de un modo explícito tal separación. Este método está ligado directamente al cálculo de proposiciones; por el contrario, no utilizaremos aquí los símbolos del cálculo de clases, pues las relaciones lógicas expresables en este último cálculo encontrarán aquí una representación simbólica diferente.

Utilizaremos letras mayúsculas griegas siempre que tengamos que designar propiedades determinadas (predicados). No es posible una confusión con el modo de designar proposiciones determinadas, ya que el signo de predicado está siempre ligado a otro signo, situado inmediatamente detrás de él, y que es el signo que se utiliza para el objeto al cual se refiere el predicado. En

algunos casos singulares utilizamos también para designar predicados determinados un grupo de letras en caracteres latinos encabezado por una mayúscula. Por ejemplo, si Π significa el predicado «es un número primo», con «$\Pi 5$» se representa la proposición «5 es un número primo»; si «Mt» es la designación del predicado «ser mortal», «Mt (Cayo)» significa «Cayo es mortal» (los paréntesis que encuadran el objeto los omitiremos en general, siempre que no se haga equívoca la proposición); si «Pos» significa el predicado «ser un número positivo», con «Pos 7» expresaremos «7 es un número positivo».

De las observaciones introductorias se infiere que no solamente nos ocupa la cuestión de convenir una propiedad a un objeto, sino también la de expresar relaciones entre varios objetos. Si tomamos el enunciado «2 es menor que 3», en él se expresa una relación entre los objetos 2 y 3; para designar relaciones concretas utilizamos los mismos signos que para propiedades concretas; si con Δ designamos, pues, la relación de ser menor, «$\Delta 2, 3$» expresará «2 es menor que 3»: en este caso el orden de sucesión de 2 y 3 en «$\Delta 2, 3$» es esencial (la coma entre 2 y 3 se ha colocado únicamente porque de otro modo se hubiera leído el número 23); en algunos casos escribiremos más escrupulosamente «$\Delta (2, 3)$»; se utilizarán también los signos usuales en las matemáticas para las relaciones, de modo que escribiremos asimismo «$< (2, 3)$» en lugar de «$\Delta (2,3)$», y significaremos con ello lo mismo que con el modo corriente de escribir «$2 < 3$», que también emplearemos. Otra relación entre dos objetos es la de igualdad: «$= (4, 2 \cdot 2)$» significa que 4 es igual a $2 \cdot 2$, para lo cual utilizaremos asimismo la forma ordinaria «$4 = 2 \cdot 2$». También existen relaciones entre más de dos objetos: si α, β y γ son puntos determinados de una recta, el enunciado «α se encuentra entre β y γ» contiene una relación entre los tres objetos α, β y γ; designemos esta relación por «Ntr» y podremos expresar el enunciado por «Ntr $\alpha\ \beta\ \gamma$», fórmula en la que hay que advertir de nuevo que no es indiferente el orden de sucesión de α, β y γ. Si α, β y γ son números naturales, «$\alpha + \beta = \gamma$» y «$\alpha \cdot \beta = \gamma$» nos proporcionan aún otras relaciones entre tres cantidades; podemos introducir para estas relaciones signos como «Ad» y «Mult», con los cuales representaremos la primera proposición por «Ad $\alpha\ \beta\ \gamma$», y la segunda por «Mult $\alpha\ \beta\ \gamma$». Del mismo modo pueden representarse fácilmente relaciones entre cuatro y más objetos.

Se ha extendido en la lógica y se ha hecho familiar la costumbre de *no solamente designar las propiedades como predicados, sino asimismo las relaciones*. Las propiedades tales como «ser un número primo» o «ser mortal» se llaman predicados con un lugar vacío o con un argumento, o abreviadamente, predicados monádicos, pues detrás del signo de predicado ha de colocarse un signo de *un solo* objeto si se desea obtener una proposición. Análogamente, llamamos a «$<$» y «$=$» predicados con dos lugares vacíos o

predicados diádicos, mientras que «Ntr», «Ad» y «Mult» son predicados triádicos.

No son necesarias explicaciones complementarias para indicar que, como es natural, en las proposiciones representadas de este modo se pueden aplicar las conexiones del cálculo proposicional: así, «$\neg\, \Pi\, 5$» significa «5 no es número primo»; el significado de «$< (2, 3) \wedge < (3, 7) \rightarrow < (2, 7)$» es claro, y «Ntr $\alpha\, \beta\, \gamma \rightarrow$ Ntr $\alpha\, \gamma\, \beta$» quiere decir: «si α se encuentra entre β y γ, entonces α se encuentra también entre γ y β.

Obsérvese por lo demás que la forma de expresión lingüística de un enunciado puede ser enteramente engañosa. Consideremos los dos enunciados «Juan y Erico son inteligentes» y «Juan y Erico son parientes», que tienen la misma forma gramatical. Pero el primero de ellos es un modo abreviado de decir «Juan es inteligente y Erico es inteligente»; si designamos el predicado (monádico) «ser inteligente» por «Int», el primer enunciado se escribe «Int (Juan) $\wedge$ Int (Erico)». Por el contrario, el segundo enunciado expresa una relación entre dos personas; simbolizando el predicado (diádico) «ser pariente» con «Par», este segundo enunciado queda así: «Par (Juan, Erico)». Por otra parte, todo predicado poliádico encierra además otro poliádico con menos lugares vacíos, y siempre uno monádico: la proposición «$< (2, 3)$» expresa por lo pronto una relación entre los dos objetos 2 y 3; pero también expresa una propiedad de 2, a saber la de «ser menor que 3», así como una propiedad de 3 —que designamos usualmente con «ser mayor que 2»—, que conviene además a todo objeto tal que 2 sea menor que dicho objeto.

Con lo dicho hasta ahora no hemos avanzado de un modo esencial más allá del cálculo proposicional; nos falta una expresión simbólica para la *universalidad* de las proposiciones. Con objeto de conseguir tal cosa introducimos *variables individuales* (*variables para objetos*), con cuyo fin emplearemos letras minúsculas escritas con caracteres latinos, x, y, z, ... Estas variables pueden situarse detrás de los signos de predicado, en los lugares en que se colocan los signos de objetos determinados, y de tal modo pueden llenarse los lugares vacíos de los signos de predicados.

Una expresión simbólica cualquiera construida del modo que acabamos de mencionar, como por ejemplo «$\neg\, (x < x)$», no representa ninguna proposición, sino una forma proposicional: únicamente se convertirá en una proposición cuando sustituyamos en lugar de x objetos determinados (en nuestro caso números naturales o números reales determinados). Para poder expresar que para números x cualesquiera «$\neg\, (x < x)$» es verdadera, introducimos el *signo universal* o *cuantificador universal:* este signo universal está formado por una **A** invertida [1], tras de la cual se coloca la variable a la que

[1] La palabra alemana para universalidad es «Allgemeinheit». (*N. del T.*)

se refiere la universalidad (la forma proposicional situada detrás, y de la que se afirma la universalidad, se encierra entre paréntesis). La forma de escribir que «$\neg(x < x)$» es válida para cualesquiera números x, es la siguiente: «$\forall x\,(\neg(x < x))$»; como es natural, «$\forall y\,(\neg(y < y))$» significa exactamente lo mismo, ya que en el signo universal es indiferente la denominación de la variable. La generalidad expresada por el signo universal se refiere en cada caso a un campo de individuos determinado, en nuestro ejemplo al campo de los números (naturales o reales).

Otro ejemplo. Mediante el cálculo de clases habíamos podido expresar con «$\alpha \subset \beta$» el hecho de que todo lo que posee cierta propiedad Φ posee asimismo la propiedad Ψ, para lo cual habíamos empleado las clases correspondientes a las propiedades. Ahora podemos escribir lo mismo en la forma «$\forall x\,(\Phi x \rightarrow \Psi x)$».

Además, el signo universal puede combinarse de modos determinados. Consideremos la forma proposicional «$(x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)$»: ésta depende de las variables x, y, z, las cuales decimos que aparecen como *variables libres*. Si ahora formamos «$\forall x\,((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$, la forma proposicional que se obtiene depende sólo de y y de z: esto quiere decir que se convierte en una proposición si se sustituyen y y z por números determinados; decimos ahora que y y z aparecen en la forma proposicional como *variables libres,* mientras que la variable x está *ligada* por el cuantificador $\forall x$. Si formamos aún «$\forall y\,(\forall x\,((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)))$» y «$\forall z\,(\forall y\,(\forall x\,((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))))$», en la primera de estas dos últimas formas proposicionales aparece sólo la variable z en forma libre, mientras que las otras dos están ligadas por cuantificadores; la última representa una verdadera proposición, en que todas las variables están ligadas: nos dice que «$(x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)$» representa una proposición verdadera para cualesquiera valores de x, y, z; puesto que en este caso cada uno de los cuantificadores extiende el campo de lo afectado por él hasta el mismo sitio que los demás, o sea hasta el final de la expresión simbólica, podemos eliminar los paréntesis situados inmediatamente detrás de los dos primeros cuantificadores, y escribimos más sencillamente «$\forall z\,\forall y\,\forall x\,((x < y) \wedge \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$», o de modo aún más simple, «$\forall z\,y\,x\,((x < y) \wedge \wedge (y < z) \rightarrow (x < z))$». Teniendo en cuenta el significado de esta fórmula, resulta por otra parte que en «$\forall z\,y\,x$» pueden permutarse como se desee las variables sin que se altere en nada su sentido.

Introducimos además un segundo cuantificador, el *signo de existencia* o *cuantificador existencial,* que representaremos por una E invertida. Si Φ es un predicado monádico, «$\exists x\,\Phi x$» significa lo siguiente: «existe un x con la propiedad Φ». Por ejemplo, el enunciado de la lógica tradicional «algunos A son B» puede presentarse en la forma «existe un x (es decir, por lo menos uno) que tiene las propiedades A y B»; si Φ y Ψ representan, respectivamen-

te, las propiedades A y B, podemos transcribir el enunciado por «$\exists x (\Phi x \wedge \wedge \Psi x)$»; este enunciado podríamos también haberlo expresado, naturalmente, en la forma «$\overline{\ } (\forall x (\Phi x \rightarrow \overline{\ } \Psi x)$» [recuérdese cómo se traduce por «$\overline{\ } (\alpha \subset \bar{\beta})$» en el cálculo de clases], que significa lo mismo que «$\exists x (\Phi x \wedge \wedge \Psi x)$». En lo que se refiere a la combinación de diversos signos de existencia y a la de signos universales y signos de existencia, podríamos repetir aquí lo dicho acerca de la combinación de signos universales, especialmente en lo que se refiere al concepto de variables libres y ligadas, puesto que los signos de existencia ligan asimismo las variables correspondientes que aparecen en las formas proposicionales situadas detrás. En lugar de la combinación de signos «$\exists x_1 \ldots \exists x_n$» escribiremos «$\exists x_1 \ldots x_n$» en caso de que todos los cuantificadores afecten campos que se extiendan hasta el mismo lugar. Tampoco aquí tiene la menor importancia el orden de sucesión de las $x_1, \ldots, x_n$.

En el caso de un predicado diádico Φ son posibles las siguientes combinaciones (con distinto significado) de los signos universal y de existencia:

$$\forall x \forall y \Phi x y, \text{ que también se escribe } \forall x y \Phi x y$$

(«$\Phi x y$ es verdadera para cualesquiera x e y»);

$$\forall x \exists y \Phi x y$$

(«para cualquier x existe un y, tal que $\Phi x y$ es verdadera»);

$$\exists x \forall y \Phi x y$$

(«existe un x, tal que $\Phi x y$ es verdadera para cualquier y»);

$$\exists x \exists y \Phi x y, \text{ que también se escribe } \exists x y \Phi x y$$

(«existen un x y un y, tales que $\Phi x y$ es verdadera»).

Demos ahora algunos ejemplos que nos familiaricen con la formulación de enunciados en nuestro simbolismo.

EJEMPLO 1. Se tienen las siguientes propiedades fundamentales de los números naturales:

a) Para todo número existe un sucesivo, y uno solo.

b) No existe ningún número al cual suceda inmediatamente 1.

c) Para todo número diferente de 1 existe otro que le precede inmediatamente.

El campo de individuos a que se refieren ahora los cuantificadores es el de los números naturales. Aparecen en los enunciados dos predicados diádicos: $\Phi x y$ («y sucede inmediatamente a x») y $x = y$ («x es igual a y»). Expresaremos primeramente los enunciados de tal modo que sea factible la

formulación de los mismos por medio de cuantificadores y de los predicados dados.

a) «Para todo número x existe un y que sucede inmediatamente a x, y que es igual a todo z que suceda inmediatamente a x» (en la segunda mitad del enunciado se trata de la unicidad del inmediato sucesivo).

$$\forall x \exists y (\Phi x y \wedge \forall z (\Phi x z \to y = z)).$$

b) $\neg (\exists x \Phi x 1)$.

c) «Para todo x diferente de 1 existe un y al cual sucede inmediatamente x, y que es igual a todo z al cual suceda inmediatamente x.»

$$\forall x (\neg (x = 1) \to \exists y (\Phi y x \wedge \forall z (\Phi z x \to y = z))).$$

EJEMPLO 2. Como *segundo ejemplo* elegimos algunos enunciados sobre números reales.

a) Dado un número real existen por lo menos dos números que son menores que él.

b) Existen por lo menos tres números reales.

c) Para todos los números x e y, los dos enunciados siguientes: «x es menor que y», y «todos los números que son menores o iguales a x son también menores que y», manifiestan exactamente lo mismo.

El campo de individuos al que se refieren los cuantificadores es el de los números reales. Los predicados son «$x < y$» y «$x = y$».

a) «Para todo x existen un y y un z, tales que y es menor que x, que z es menor que x, y que y es diferente de z.

$$\forall x \exists y z (y < x \wedge z < x \wedge \neg (y = z)).$$

b) «Existen un x y un y y un z, tales que x es distinto de y, x es distinto de z e y es distinto de z.»

$$\exists x y z (\neg (x = y) \wedge \neg (x = z) \wedge \neg (y = z)).$$

c) $\forall x y (x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \vee z = x \to z < y))$.

EJEMPLO 3. Como *tercer ejemplo* emprenderemos el análisis lógico del enunciado «si existe un hijo, entonces existe también un padre», al cual habíamos aludido brevemente en el § 1; decíamos allí que su fundamento es la relación «x, como varón, tiene a y por hijo», y transcribiremos ésta por $\Gamma x y$. El predicado «x es hijo» se dice más exactamente con, «existe un y tal que $\Gamma x y$ es verdadera», y lo escribiremos así: «$\exists y \Gamma y x$». Representaremos el predicado «x es padre» por «$\exists y \Gamma x y$». Por tanto, «si existe un hijo, entonces existe un padre», se expresa mediante «$\exists x y \Gamma y x \to$

$\rightarrow \exists x\, y\, \Gamma\, x\, y$». Como la denominación de las variables ligadas es indiferente, intercambiando los nombres de las variables que se encuentran en la parte situada detrás del signo «→» se puede escribir también «$\exists x\, y\, \Gamma\, y\, x \rightarrow \rightarrow \exists y\, x\, \Gamma\, y\, x$». Por otra parte, se observa inmediatamente el carácter puramente lógico del enunciado: pues el segundo miembro de la implicación procede del primero por intercambio de lugar de los dos signos de existencia, lo cual es siempre posible sin que varíe el valor veritativo.

EJEMPLO 4. Como *cuarto ejemplo* formularemos las expresiones matemáticas en que se contiene la definición recurrente de la suma; tal como se escriben usualmente en las matemáticas, son las siguientes: $a + 0 = a$; $a + (b + 1) = (a + b) + 1$. Tenemos que observar lo siguiente: la igualdad $a + b = c$ corresponde a una relación entre tres objetos, *a*, *b* y *c*; como «+» es una función de dos variables, esta relación es unívoca [2] en *c* una vez que se han dado *a* y *b*; además, para cada *a* y *b* existe un *c* que es igual a $a + b$; todo esto está dado directamente por el concepto de función, pero no por el de relación, de modo que habremos de introducir expresamente las proposiciones correspondientes. El campo de individuos está aquí tomado entre los números naturales. Designaremos por «Ad *x y z*» el predicado triádico implicado en «$x + y = z$», y utilizaremos además la relación «$x = y$». En lugar de las dos fórmulas matemáticas escritas arriba tenemos las cuatro proposiciones siguientes:

a) $\forall x\, y \exists z\, \mathrm{Ad}\, x\, y\, z$.

b) $\forall x\, y\, z\, u\, (\mathrm{Ad}\, x\, y\, z \wedge \mathrm{Ad}\, x\, y\, u \rightarrow z = u)$.

Estas dos proposiciones establecen que el predicado «Ad» representa una función.

c) $\forall x\, \mathrm{Ad}\, x\, 0\, x$.

Es la fórmula matemática $a + 0 = a$.

d) $\forall x\, y\, z\, u\, v\, (\mathrm{Ad}\, y\, 1\, z \wedge \mathrm{Ad}\, x\, z\, u \wedge \mathrm{Ad}\, x\, y\, v \rightarrow \mathrm{Ad}\, v\, 1\, u)$.

«Si *z* es el resultado de la suma de *y* con 1, *u* el resultado de la suma de *x* con *z* y *v* el de la suma de *x* con *y*, entonces *u* es también el resultado de la suma de *v* con 1»: que es la expresión simbólica de «$a + (b + 1) = (a + + b) + 1$».

§ 3. Las expresiones y su validez universal

Vamos a definir el concepto «expresión del cálculo de predicados». Con tal fin introducimos, junto a las *variables proposicionales A, B, C,* ... y las *variables individuales x, y, z,* x_1, x_2, ..., las *variables predicado,* que desig-

---

[2] Casi no parece necesario advertir que los autores se refieren, tanto aquí como un poco más abajo, sólo a funciones unívocas (o «uniformes»). (*N. del T.*)

naremos también con caracteres mayúsculos latinos. Para cada contexto completo fijaremos al comienzo qué letras mayúsculas latinas habremos de emplear como variables proposicionales, cuáles para variables predicados monádicas, cuáles para variables predicado diádicas, etc. Por otra parte, de las fórmulas mismas se infiere el uso que hacemos: pues una variable predicado monádica está siempre enlazada con una variable individual que se encuentra detrás de ella, una variable predicado diádica lo está con dos variables individuales que la siguen, etc., mientras que tras las variables proposicionales faltan variables individuales. Como es natural, en cada texto una letra mayúscula latina determinada sólo podrá utilizarse para un tipo de variables.

La *definición de expresión* se lleva a cabo de tal modo que se puedan formar mediante las reglas que se insertan a continuación, tanto las expresiones más complicadas como las más sencillas, y a la vez se define el concepto de variables individuales libres y ligadas. Con la definición de expresión evitamos además que una y la misma variable aparezca en una expresión a la vez en forma libre y en forma ligada, pues entonces se originarían complicaciones innecesarias sin que aumentasen las posibilidades de representación del cálculo.

Nuestras reglas son las siguientes:

1. Las variables proposicionales son expresiones.

2. Las variables predicado *n*-ádicas, tras las que se encuentran *n* variables individuales, son expresiones.

Las expresiones formadas según 1. y 2. recibirán el nombre de *fórmulas primarias:* las variables individuales que aparecen en ellas están libres.

3. Si «$\mathfrak{A}$» es una expresión, «$\neg(\mathfrak{A})$» es también una expresión. Las variables individuales que aparecen en «$\neg(\mathfrak{A})$» están libres o ligadas de acuerdo con las características con que aparezcan en «$\mathfrak{A}$».

4. Si «$\mathfrak{A}$» y «$\mathfrak{B}$» son expresiones de tal tipo que la misma variable individual no aparezca en una en forma libre y en la otra en forma ligada, también son expresiones «$(\mathfrak{A}) \wedge (\mathfrak{B})$», «$(\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B})$», «$(\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$» y «$(\mathfrak{A}) \leftrightarrow (\mathfrak{B})$». Cada variable aparece en estas expresiones en forma libre o ligada, del mismo modo que se encuentre en alguna de las expresiones $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$.

5. Sea «$\mathfrak{A}$» una expresión en la que aparezca la variable x en forma libre; entonces, «$\forall x(\mathfrak{A})$» y «$\exists x(\mathfrak{A})$» son asimismo expresiones. Se llama a «$\mathfrak{A}$» *campo de afección* del cuantificador del caso. Se dice que la variable x está ligada en «$\forall x(\mathfrak{A})$» y en «$\exists x(\mathfrak{B})$»; se llamará a las demás variables de «$\forall x(\mathfrak{A})$» y de «$\exists x(\mathfrak{A})$» libres o ligadas teniendo en cuenta que han de tener el mismo carácter que en «$\mathfrak{A}$». (Se aplican las mismas determinaciones en caso de que en lugar de la variable x se mencione cualquier otra variable, por ejemplo, y o z.)

Una expresión es solamente aquello que se muestre como tal tras una

aplicación finita de las reglas 1. a 5. Con objeto de no escribir paréntesis innecesarios se omiten éstos en los casos en que no pueda surgir ninguna duda en punto a la articulación de la fórmula: por ejemplo, alrededor de las fórmulas primarias, y también los que encerrarían una expresión de las formas «$\neg(\mathfrak{A})$», «$\forall x(\mathfrak{A})$» o «$\exists x(\mathfrak{A})$». Así, pues, «$\forall x F x \to \exists x F x$» significa lo mismo que «$(\forall x(F x)) \to (\exists x(F x))$». Asimismo observaremos aquí la convención, ya conocida desde el cálculo de proposiciones, de que «$\neg$», «$\wedge$» y «$\vee$» enlazan más estrechamente que «$\to$» y «$\leftrightarrow$». Utilizaremos además ahora el acuerdo aludido en el § 2: si varios signos universales o de existencia están colocados, sin separación alguna por paréntesis, uno inmediatamente a continuación de otro, ha de entenderse que el campo de afección de estos cuantificadores se extiende hasta el mismo lugar, o sea hasta donde termine el campo de afección del último cuantificador.

Son expresiones, por ejemplo: «$A \to (B \to \exists x G x)$», «$\neg \exists x(F x \wedge G x)$», «$\forall x \exists y (A \wedge (\neg B \vee H x y))$».

Por otra parte, se puede adoptar un concepto de expresión más estrecho: cuando se eliminan las expresiones que contienen variables proposicionales.

Emplearemos, como antes, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... para expresiones cualesquiera, $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$, ... para expresiones que contengan la variable libre x, $\mathfrak{A}(x, y)$, ... para expresiones que contengan las variables libres x e y, etc.

Se dice que una expresión es *válida en un campo de individuos* cuando ocurre lo siguiente: si en dicha expresión se sustituyen las variables proposicionales por proposiciones determinadas, las variables predicado n-ádicas por signos de predicados n-ádicos determinados, definidos en el campo de individuos, y las variables individuales libres por objetos del campo de individuos, pero de tal modo que cada variable quede sustituida de la misma manera en todos los lugares en que aparezca, la expresión se convierte en una proposición verdadera para toda sustitución de este tipo.

Llamamos en particular *válida-n* a una expresión cuando es válida en un campo de n individuos. *Si n es un número determinado podemos comprobar fácilmente la validez-n de una expresión cualquiera.*

Es suficiente explicar esto con un ejemplo. Vamos a estudiar si la expresión «$\forall x \exists y (\neg G x x \vee \neg F x \vee G x y)$» es válida-3.

Podemos designar con α, β, γ los tres individuos del campo, cuya denominación es indiferente. Sean ahora Φ y Ψ predicados cualesquiera del campo de individuos que correspondan a las variables G y F; la validez-3 significa entonces que «$\forall x \exists y (\neg \Phi x x \vee \neg \Psi x \vee \Phi x y)$» representa siempre una proposición verdadera. Si ahora Δ es un predicado monádico cualquiera en el campo de individuos, «$\forall x \Delta x$» significa evidentemente lo mismo que «$\Delta\alpha \wedge \Delta\beta \wedge \Delta\gamma$», y «$\exists x \Delta x$» lo mismo que «$\Delta\alpha \vee \Delta\beta \vee \Delta\gamma$».

Por tanto podemos escribir, por lo pronto, en lugar de «$\forall x \exists y (\neg \Phi x x \vee \vee \neg \Psi x \vee \Phi x y)$»:

$$«\exists y (\neg \Phi \alpha \alpha \vee \neg \Psi \alpha \vee \Phi \alpha y) \wedge$$
$$\wedge \exists y (\neg \Phi \beta \beta \vee \neg \Psi \beta \vee \Phi \beta y) \wedge \exists y (\neg \Phi \gamma \gamma \vee \neg \Psi \gamma \vee \Phi \gamma y)».$$

Resolviendo los signos de existencia obtenemos

$$«((\neg \Phi \alpha \alpha \vee \neg \Psi \alpha \vee \Phi \alpha \alpha) \vee (\neg \Phi \alpha \alpha \vee \neg \Psi \alpha \vee \Phi \alpha \beta) \vee$$
$$\vee (\neg \Phi \alpha \alpha \vee \neg \Psi \alpha \vee \Phi \alpha \gamma)) \wedge ((\neg \Phi \beta \beta \vee \neg \Psi \beta \vee \Phi \beta \alpha) \vee$$
$$\vee (\neg \Phi \beta \beta \vee \neg \Psi \beta \vee \Phi \beta \beta) \vee (\neg \Phi \beta \beta \vee \neg \Psi \beta \vee \Phi \beta \gamma)) \wedge$$
$$\wedge ((\neg \Phi \gamma \gamma \vee \neg \Psi \gamma \vee \Phi \gamma \alpha) \vee (\neg \Phi \gamma \gamma \vee \neg \Psi \gamma \vee \Phi \gamma \beta) \vee$$
$$\vee (\neg \Phi \gamma \gamma \vee \neg \Psi \gamma \vee \Phi \gamma \gamma))».$$

Lo que hemos escrito ha de representar una proposición verdadera cuando Φ y Ψ sean arbitrarias; pero esto quiere decir que ha de ocurrir tal cosa cuando se elijan valores veritativos arbitrarios para las proposiciones $\Phi \alpha \alpha$, $\Phi \alpha \beta$, $\Phi \beta \gamma$, $\Psi \alpha$, $\Psi \beta$, $\Psi \gamma$, etc. Esto sucede cuando, y solamente cuando, la última expresión simbólica procede de la sustitución en una expresión universalmente válida del cálculo proposicional, o sea cuando es una tautología; como es obvio que éste es el caso presente, la expresión es válida-3.

Se dice que una expresión es *universalmente válida* cuando es válida en todo campo de individuos no vacío.

Se llama a una expresión *cumplible en un campo de individuos* cuando existe una sustitución, de las variables proposicionales por proposiciones determinadas, de las variables predicado *n*-ádicas por predicados *n*-ádicos determinados del campo de individuos y de las variables libres por objetos determinados del campo de individuos, tal que la expresión se convierta en una proposición verdadera.

Es claro que una expresión es cumplible en un campo de individuos cuando no es válida en este campo la misma expresión negada, y sólo en tal caso.

Se dice que una expresión es *simplemente cumplible* cuando existe en general un campo de individuos no vacío en el cual es cumplible. *Una expresión es cumplible siempre que la misma expresión negada no sea universalmente válida, y únicamente en este caso.*

Dos expresiones $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ se llaman *equivalentes* cuando «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$» tiene validez universal. Si $\mathfrak{A}$ es equivalente a $\mathfrak{B}$, cuando se sustituye $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{B}$ en una expresión cualquiera $\mathfrak{C}$ que contenga a $\mathfrak{A}$ como expresión parcial, se obtiene de nuevo una expresión equivalente [3].

---

[3] A $\mathfrak{C}$. *(N. del T.)*

Habíamos mencionado ya que los signos consecutivos universales o de existencia que se extienden hasta el mismo lugar, son intercambiables; por ello, «$\forall x\, y\, F\, x\, y$» eq «$\forall y\, x\, F\, x\, y$», así como «$\exists x\, y\, F\, x\, y$» eq «$\exists y\, x\, F\, x\, y$». Es notable la equivalencia «$\exists x\, F\, x$» eq «$\neg \forall x \neg F\, x$»: pues si Φ es un predicado monádico cualquiera, «existe un x con la propiedad $\Phi\, x$» y «no para todo x ocurre que no es $\Phi\, x$» significan lo mismo en todos los campos; análogamente sucede con «$\forall x\, F\, x$» eq «$\neg \exists x \neg F\, x$». *Basándose en estas equivalencias se pueden eludir el signo universal o el signo de existencia, pues es posible expresar aquel signo mediante éste, y a la inversa.* En lo que se refiere al signo de existencia mencionaremos asimismo la equivalencia entre «$\exists x\, F\, x \vee F\, y$» y «$\exists x\, F\, x$»: de hecho, si Φ es un predicado monádico y α un objeto determinado del campo correspondiente, a partir de «$\exists x\, \Phi\, x \vee \vee \Phi\, \alpha$» se sigue que «$\exists x\, \Phi\, x$» es verdadero, puesto que se sigue tanto de «$\exists x\, \Phi\, x$» como de «$\Phi\, \alpha$» (es ya verdadero en el cálculo proposicional que de «$\exists x\, \Phi\, x$» se sigue «$\exists x\, \Phi\, x \vee \Phi\, \alpha$»).

§ 4. Un sistema axiomático para las expresiones universalmente válidas

Como aclararemos con mayor exactitud, en el cálculo de predicados no hay ningún criterio que permita decidir si una expresión cualquiera es universalmente válida o no. Según lo visto hasta ahora, sólo podemos hacer comprobaciones de una naturaleza esencialmente negativa, y ello en ciertos casos: cuando averiguamos, por ejemplo, que una expresión determinada no puede ser universalmente válida por ser posible mostrar que no es válida-5. Por tanto, aumenta de importancia el que se hayan encontrado sistemas idóneos de axiomas para las expresiones válidas universalmente.

Presentaremos a continuación un sistema axiomático que contiene únicamente los signos conectivos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists x$», ya que todos los demás pueden representarse por medio de estos tres; este sistema es una generalización del establecido en el capítulo I, § 9 para las expresiones universalmente válidas del cálculo proposicional, y puede servir, de modo análogo, para extraer las expresiones universalmente válidas, tanto aquéllas en que aparezcan también variables proposicionales como únicamente las que no contengan estas variables: en este último caso basta limitar del modo correspondiente el campo de las fórmulas elementales admitidas.

Emplearemos a continuación el modo de escribir utilizado ya en el sistema axiomático del capítulo primero, en el que transcribíamos las disyunciones multimembres sin paréntesis.

Adoptaremos como *fórmulas elementales* todas las expresiones que consistan en una disyunción «$\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$» en la que se cumplan las siguientes condiciones: toda $\mathfrak{A}_i$ será una fórmula primaria, o una fórmula primaria

negada, o tendrá la forma «$\exists x\, \mathfrak{B}$» (o bien «$\exists y\, \mathfrak{B}$», «$\exists z\, \mathfrak{B}$», etc.); además han de existir una $\mathfrak{A}_i$ y una $\mathfrak{A}_j$ tales que $\mathfrak{A}_i$ sea una fórmula primaria y $\mathfrak{A}_j$ tenga la configuración «$\neg\, \mathfrak{A}_i$». Tenemos, por añadidura, las siguientes *reglas de deducción:*

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(a)}$$

En esta primera regla pueden faltar $\mathfrak{M}$ o $\mathfrak{N}$ o ambas. En caso de que aparezca $\mathfrak{N}$ no ha de contener ningún miembro disyuntivo de una de las formas «$\neg\neg\, \mathfrak{B}$», «$\neg\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$» o «$\neg\, \exists x\, \mathfrak{B}$» (o «$\neg\, \exists y\, \mathfrak{B}$», etc.), ni ha de consistir ella misma en una de estas formas.

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N} \qquad \mathfrak{M} \vee \neg\, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(b)}$$

En esta regla han de cumplirse las mismas condiciones que en (a) en lo que se refiere a $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$; por otra parte, $\mathfrak{B}$ no ha de ser una disyunción.

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \neg\, \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg\, \exists x\, \mathfrak{A}\, (x) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(c)}$$

En este caso $\mathfrak{A}\, (y)$ será una expresión que contenga la variable libre y; en caso de que aparezcan $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ no contendrán la variable y, así como tampoco la variable x. En lugar de y y de x pueden presentarse, sujetas a las mismas condiciones, cualesquiera otras variables en la fórmula superior y en la inferior (incluso la misma en ambas). Por lo demás, $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ están sometidas a las mismas condiciones que en (a).

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \exists x\, \mathfrak{A}\, (x) \vee \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \exists x\, \mathfrak{A}\, (x) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(d)}$$

$\mathfrak{A}\, (x)$ es cualquier expresión que contenga la variable libre x; $\mathfrak{A}\, (y)$ se obtiene, lo mismo que en (c), sustituyendo en $\mathfrak{A}\, (x)$ x por y en todos los lugares en que aparezca aquella variable. A $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ se les imponen las mismas condiciones que en (a), y además sólo se toleran para $\mathfrak{M}$ las mismas configuraciones que para $\mathfrak{N}$. Si la variable y no aparece en la fórmula inferior, ésta no debe contener ninguna variable libre. Esta regla será también válida en caso de que en lugar de x e y se empleen otras variables con el mismo sentido. Además, $\mathfrak{A}\, (y)$ no ha de aparecer una segunda vez como miembro disyuntivo en la fórmula superior.

En primer lugar nos convenceremos de que este sistema axiomático sólo da lugar a expresiones universalmente válidas. Las fórmulas elementales pro-

ceden, por reemplazamiento, de fórmulas de validez universal del cálculo proposicional y son por ello también universalmente válidas. Ya hemos podido comprobar en el § 9 del capítulo I la verdad de las reglas (a) y (b). En lo que se refiere a (c), la validez universal de la fórmula superior tiene el mismo significado (si utilizamos por un momento el signo universal) que la de «$\mathfrak{A}\, y\, (\mathfrak{M} \vee \neg\, \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N})$»; puesto que $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ no contienen la variable y, esta última fórmula es equivalente a «$\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}\, y \neg\, \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N}$»; pero «$\mathfrak{A}\, y \neg\, F\, y$» eq «$\neg\, \mathfrak{E}\, y\, F\, y$», luego «$\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}\, y \neg\, \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N}$» eq «$\mathfrak{M} \vee \vee \neg\, \mathfrak{E}\, y\, \mathfrak{A}\, (y) \vee \mathfrak{N}$», lo cual significa lo mismo —puesto que la denominación de las variables ligadas es indiferente— que «$\mathfrak{M} \vee \neg\, \mathfrak{E}\, x\, \mathfrak{A}\, (x) \vee \mathfrak{N}$». Para (d) empleamos la relación mencionada al final del § 3, «$\mathfrak{E}\, x\, F\, x \vee F\, y$» eq «$\mathfrak{E}\, x\, F\, x$».

Por otra parte se infiere de lo anterior algo que más tarde será de importancia: y es que no solamente la validez universal de la fórmula superior (o fórmulas superiores) implica la de la inferior, sino que también ocurre lo contrario, es decir, que la validez universal de la fórmula inferior lleva consigo de la fórmula superior [o la de las dos fórmulas superiores, en el caso de (b)].

Averiguamos con ello que *todas las expresiones deductibles en este sistema son universalmente válidas*. De acuerdo con el punto de vista axiomático adoptado, el proceso deductivo se realiza en el sistema de axiomas de un modo puramente formal, sin emplear ningún contenido del concepto de validez universal y sin que, en general, se atienda al sentido de las fórmulas.

Damos ahora una serie de procesos deductivos.

$$\mathfrak{A}\, x\, (F\, x \vee \neg\, F\, x). \tag{1}$$

Puesto que no hemos adoptado los signos «$\wedge$», «$\rightarrow$», «$\leftrightarrow$» ni «$\mathfrak{A}\, x$» como signos fundamentales, hemos de estimarlos abreviaciones de otras combinaciones de signos: así, «$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$», «$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$» y «$\mathfrak{A}\, x\, \mathfrak{A}\, (x)$» significarán, respectivamente, «$\neg\, (\neg\, \mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{B})$», «$\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$», «$\neg\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \vee \neg\, (\neg\, \mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{B})$» [4] y «$\neg\, \mathfrak{E}\, x \neg\, \mathfrak{A}\, (x)$». Para transcribir una fórmula en que aparezcan varios de estos signos, se eliminan primero aquéllos que estén situados más en el interior, luego los siguientes, etc. De este modo, la fórmula que hemos escrito significa «$\neg\, \mathfrak{E}\, x \neg\, (F\, x \vee \neg\, F\, x)$».

DEMOSTRACIÓN. $F\, x \vee \neg\, F\, x$ (fórmula elemental); $\neg\, \neg\, (F\, x \vee \neg\, F\, x)$ [según (a)]; $\neg\, \mathfrak{E}\, x \neg\, (F\, x \vee \neg\, F\, x)$ [según (c)].

$$\mathfrak{A}\, x\, F\, x \rightarrow \mathfrak{E}\, x\, F\, x. \tag{2}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg\, \neg\, (\mathfrak{E}\, x \neg\, F\, x) \vee \mathfrak{E}\, x\, F\, x$.

---

[4] Recuérdese la equivalencia (23), § 5 del Capítulo I. (*N. del T.*)

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg F x \vee \neg F y \vee \exists x F x \vee F y$ (fórmula elemental); $\exists x \neg F x \vee \exists x F x \vee F y$ [según (d)]; $\exists x \neg F x \vee \exists x F x$ [según (d)]; $\neg \neg (\exists x \neg F x) \vee \exists x F x$ [según (a)].

$$\forall x (A \vee F x) \rightarrow A \vee \forall x F x. \tag{3}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \exists x \neg F x$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg A \vee A \vee F y$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg F y \vee A \vee F y$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg (A \vee F y) \vee A \vee F y$ [según (b)];
$\exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee F y$ [según (d)];
$\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee F y$ [según (a)];
$\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \neg F y$ [según (a)];
$\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \exists x \neg F x$ [según (c)].

$$\forall x (A \rightarrow F x) \rightarrow (A \rightarrow \forall x F x). \tag{4}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg \neg \exists x \neg (\neg A \vee F x) \vee \neg A \vee \neg \exists x \neg F x$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg (\neg A \vee F x) \vee A \vee \neg A \vee F y$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (\neg A \vee F x) \vee \neg \neg A \vee \neg A \vee F y$ [según (a)];
$\exists x \neg (\neg A \vee F x) \vee \neg F y \vee \neg A \vee F y$ (fórmula elemental).

La demostración continúa exactamente paralela a la de (3), empleándose las dos últimas fórmulas en lugar de las fórmulas elementales que se utilizan en (3): el proceso demostrativo es rigurosamente el mismo, con la única diferencia de que en lugar de A se encuentra $\neg A$.

$$A \rightarrow \forall x (A \vee F x). \tag{5}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg A \vee \neg \exists x \neg (A \vee F x)$.

DEMOSTRACIÓN. $\neg A \vee A \vee F x$ (fórmula elemental);
$\neg A \vee \neg \neg (A \vee F x)$ [según (a)]; $\neg A \vee \neg \exists x \neg (A \vee F x)$ [según (c)].

$$\forall x (A \vee F x) \leftrightarrow A \vee \forall x F x. \tag{6}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg (\neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \exists x \neg F x) \vee$
$\vee \neg (\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg (A \vee \neg \exists x \neg F x))$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg F y \vee A \vee F y$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg A \vee A \vee F y$ (fórmula elemental);

$\exists x \neg (A \vee F x) \vee \neg (A \vee F y) \vee A \vee F y$ [según (b)];
$\exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee F y$ [según (d)];
$\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee F y$ [según (a)];
$\neg A \vee A \vee F y$ [fórmula elemental];
$\neg (\neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A) \vee A \vee F y$ [según (b)]*;
$\exists x \neg F x \vee \neg F y \vee A \vee F y$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg F x \vee A \vee F y$ [según (d)]; $\neg \neg \exists x \neg F x \vee A \vee F y$ [según (a)]; $\neg (\neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \exists x \neg F x) \vee A \vee F y$ [según (b), a partir de la última fórmula y de la marcada con *]. En las fórmulas que siguen designamos la expresión «$\neg (\neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee A \vee \neg \exists x \neg F x)$», de un modo abreviado, por $\mathfrak{A}$; de este modo la última fórmula se escribe $\mathfrak{A} \vee A \vee F y$. $\mathfrak{A} \vee \neg \neg (A \vee F y)$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee \neg \exists x \neg (A \vee F x)$ [según (c)]; $\mathfrak{A} \vee \neg \neg \neg \exists x \neg (A \vee F x)$ [según (a)]**; a partir de $\mathfrak{A} \vee A \vee F y$ se obtienen además $\mathfrak{A} \vee A \vee \neg \neg F y$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee A \vee \neg \exists x \neg F x$ [según (c)]; $\mathfrak{A} \vee \neg \neg (A \vee \neg \exists x \neg F x)$ [según (a)]; a partir de la última fórmula y de ** se encuentra, según (b), $\mathfrak{A} \vee \neg (\neg \neg \exists x \neg (A \vee F x) \vee \vee \neg (A \vee \neg \exists x \neg F x))$, que es la tesis.

$$\forall x F x \to F y. \tag{7}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg \neg \exists x \neg F x \vee F y$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg F x \vee \neg F y \vee F y$ (fórmula elemental); $\exists x \neg F x \vee F y$ [según (d)]; $\neg \neg \exists x \neg F x \vee F y$ [según (a)].

$$F y \to \exists x F x. \tag{8}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg F y \vee \exists x F x$.

DEMOSTRACIÓN. $\neg F y \vee \exists x F x \vee F y$ (fórmula elemental); $\neg F y \vee \exists x F x$ [según (d)].

$$\forall x (F x \to A) \to (\exists x F x \to A). \tag{9}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg \neg \exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee \neg \exists x F x \vee A$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee F y \vee \neg F y \vee A$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee \neg \neg F y \vee \neg F y \vee A$ [según (a)];
$\exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee \neg A \vee \neg F y \vee A$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee \neg (\neg F y \vee A) \vee \neg F y \vee A$ [según (b)];
$\exists x \neg (\neg F x \vee A) \vee \neg F y \vee A$ [según (d)];

$\neg\neg\exists x \neg(\neg Fx \vee A) \vee \neg Fy \vee A$ [según (a)];
$\neg\neg\exists x \neg(\neg Fx \vee A) \vee \neg\exists x Fx \vee A$ [según (c)].

$$\forall x (A \wedge Fx) \leftrightarrow A \wedge \forall x Fx. \tag{10}$$

TRANSCRIPCIÓN.

$$\neg(\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)) \vee$$
$$\vee \neg(\neg\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg\neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)).$$

DEMOSTRACIÓN. $\neg A \vee \exists x \neg Fx \vee A$ (fórmula elemental);
$\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx \vee A$ [según (a)];
$\neg\neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx) \vee A$ [según (a)];
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg A \vee \neg Fy \vee A$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg\neg(\neg A \vee \neg Fy) \vee A$ [según (a)];
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee A$ [según (d)];
$\neg\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee A$ [según (a)];
$\neg(\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)) \vee A$
[a partir de la última fórmula y de la 3.ª fórmula de la demostración, según (b)];
$\neg A \vee \exists x \neg Fx \vee \neg Fy \vee Fy$ (fórmula elemental);
$\neg A \vee \exists x \neg Fx \vee Fy$ [según (d)]; $\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx \vee Fy$ [según (a)];
$\neg\neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx) \vee Fy$ [según (a)];
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg A \vee \neg Fy \vee Fy$ (fórmula elemental);
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg\neg(\neg A \vee \neg Fy) \vee Fy$ [según (a)];
$\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee Fy$ [según (d)];
$\neg\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee Fy$ [según (a)];
$\neg(\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)) \vee Fy$
[a partir de la última fórmula y de la 12.ª fórmula de la demostración, según (b)].

En adelante designaremos la expresión

«$\neg(\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx) \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx))$»

de un modo abreviado por $\mathfrak{A}$. Hasta ahora hemos demostrado «$\mathfrak{A} \vee A$» y «$\mathfrak{A} \vee Fy$». Obtenemos además: $\mathfrak{A} \vee \neg\neg A$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee \neg\neg Fy$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee \neg\exists x \neg Fx$ [según (c)]; $\mathfrak{A} \vee \neg\neg\neg\exists x \neg Fx$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)$ [a partir de la última fórmula y de «$\mathfrak{A} \vee \neg\neg A$», según (b)]; $\mathfrak{A} \vee \neg\neg\neg(\neg A \vee \neg\neg\exists x \neg Fx)$ [según (a)]; $\mathfrak{A} \vee \neg(\neg A \vee \neg Fy)$ [a partir de «$\mathfrak{A} \vee \neg\neg A$» y «$\mathfrak{A} \vee \neg\neg Fy$», según (b)];
$\mathfrak{A} \vee \neg\neg\neg(\neg A \vee \neg Fy)$ [según (a)];
$\mathfrak{A} \vee \neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx)$ [según (c)];
$\mathfrak{A} \vee \neg\neg\neg\exists x \neg\neg(\neg A \vee \neg Fx)$ [según (a)];

$\mathfrak{A} \vee \neg (\neg \neg \exists x \neg \neg (\neg A \vee \neg F x) \vee \neg \neg (\neg A \vee \neg \neg \exists x \neg F x))$
[a partir de la última fórmula y de «$\mathfrak{A} \vee \neg \neg \neg (\neg A \vee \neg \neg \exists x \neg F x)$», según (b)]: pero ésta es la tesis.

Una vez que nos hemos ejercitado en la extracción de fórmulas, vamos a presentar un proceso por cuyo medio podamos encontrar por nosotros mismos la demostración de las fórmulas que escribamos. Pues este sistema de axiomas tiene algo de la cualidad del sistema axiomático del capítulo I, § 9, en el cual era posible decidir para toda expresión si era deductible o no, y encontrar en su caso el proceso deductivo. *En el sistema axiomático que acabamos de establecer no es siempre posible decidir si una expresión es deductible o no, pero se puede encontrar la demostración de toda expresión deductible en general por medio de cierto proceso (cuya longitud, ciertamente, no está previamente determinada)* [5].

Pues para cualquier expresión que contenga un miembro disyuntivo de las formas «$\neg \neg \mathfrak{A}$», «$\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$» o «$\neg \exists x \mathfrak{A}(x)$», o que tenga ella misma una de estas formas, entran en juego solamente fórmulas superiores de (a), (b) y (c), y precisamente una sola de tales fórmulas superiores en cada caso —dado el modo en que hemos formulado dichas reglas—, que está perfectamente determinada si no tenemos en cuenta la denominación (indiferente) de la variable libre en la fórmula superior de (c). Si no nos encontramos en tal caso, la expresión sólo puede ser una fórmula inferior de (d): y entonces se tiene únicamente un número finito de posibilidades para las fórmulas superiores —aparte de la denominación de las variables libres en algunos casos—. Continuando este proceso de buscar reiteradamente las fórmulas superiores de las posibles fórmulas superiores, se llegará —cuando se trate de una expresión deductible— tras un número finito de pasos (cuyo número, por otra parte, no puede en general anticiparse) a unas últimas fórmulas superiores que serán fórmulas elementales: con lo cual tenemos la demostración sin más que invertir el orden de sucesión de las fórmulas.

Aclaremos esto con un ejemplo.

$$\exists x \exists y F x y \leftrightarrow \exists y \exists x F x y. \tag{11}$$

TRANSCRIPCIÓN. $\neg (\exists x \exists y F x y \vee \exists y \exists x F x y) \vee$
$\vee \neg (\neg \exists x \exists y F x y \vee \neg \exists y \exists x F x y)$.

Esta fórmula puede proceder solamente, según (b), de las dos fórmulas superiores «$\neg (\exists x \exists y F x y \vee \exists y \exists x F x y) \vee \neg \neg \exists x \exists y F x y$» y «$\neg (\exists x \exists y F x y \vee \exists y \exists x F x y) \vee \neg \neg \exists y \exists x F x y$». La primera de ellas

---

[5] Recuérdese además que, como se ha demostrado un poco más arriba, todas las expresiones deductibles en este sistema axiomático son universalmente válidas. *(N. del T.)*

tiene como fórmula superior «$\neg(\exists x \exists y F x y \vee \exists y \exists x F x y) \vee \exists x \exists y F x y$», y ésta las dos fórmulas superiores «$\neg \exists x \exists y F x y \vee \exists x \exists y F x y$» y «$\neg \exists y \exists x F x y \vee \exists x \exists y F x y$»; de estas dos últimas fórmulas, la primera tiene por fórmula superior «$\neg \exists y F z y \vee \exists x \exists y F x y$», y por fórmula superior de ésta, (α), «$\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y$», en la que en lugar de z y u pueden encontrarse otras variables distintas de x e y; a la segunda corresponde la cadena de fórmulas superiores, «$\neg \exists x F x z \vee \exists x \exists y F x y$» y ($\beta$) «$\neg F u z \vee \exists x \exists y F x y$». De modo análogo se asciende a partir de «$\neg(\exists x \exists y F x y \vee \exists y \exists x F x y) \vee \neg\neg \exists y \exists x F x y$», de un modo unívoco, hasta las fórmulas (γ) «$\neg F z u \vee \exists y \exists x F x y$» y ($\delta$) «$\neg F u z \vee \vee \exists y \exists x F x y$». Con ello hemos retrotraído la deductibilidad de nuestra fórmula, a la de las (α), (β), (γ) y (δ). Según (d), (α) puede solamente proceder de la fórmula superior «$\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y \vee \exists y F x y$» o de esta otra, «$\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y \vee \exists y F u y$», de las que la primera tiene por posibles fórmulas superiores [6]

$$\text{«}\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y \vee \exists y F u y \vee \exists y F z y\text{»},$$
$$\text{«}\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y \vee \exists y F z y \vee F z z\text{»} \text{ y}$$
$$\text{«}\neg F z u \vee \exists x \exists y F x y \vee \exists y F z y \vee F z u\text{».}$$

Como la última fórmula es una fórmula elemental, hemos encontrado la demostración de (α). De un modo enteramente análogo probaríamos (β), (γ) y (δ): con lo cual queda demostrada (11).

El lector puede hallar por sí mismo de este modo las demostraciones de las siguientes fórmulas deducibles:

$$\forall x \forall y F x y \leftrightarrow \forall y \forall x F x y \tag{12}$$
$$\forall x (F x \wedge G x) \leftrightarrow \forall x F x \wedge \forall x G x \tag{13}$$
$$\forall x (F x \rightarrow G x) \rightarrow (\forall x F x \rightarrow \forall x G x) \tag{14}$$
$$\forall x (F x \leftrightarrow G x) \rightarrow (\forall x F x \leftrightarrow \forall x G x) \tag{15}$$
$$\exists x F x \leftrightarrow \neg \forall x \neg F x \tag{16}$$
$$\exists x \neg F x \leftrightarrow \neg \forall x F x \tag{17}$$
$$\neg \exists x \neg F x \leftrightarrow \forall x F x \tag{18}$$
$$\neg \exists x F x \leftrightarrow \forall x \neg F x \tag{19}$$
$$\forall x (F x \rightarrow G x) \rightarrow (\exists x F x \rightarrow \exists x G x) \tag{20}$$
$$\forall x (F x \leftrightarrow G x) \rightarrow (\exists x F x \leftrightarrow \exists x G x) \tag{21}$$
$$\exists x \forall y F x y \rightarrow \forall y \exists x F x y \tag{22}$$

---

[6] Según (d); para la primera, $\exists y F z y$ se considera incluido en $\mathfrak{M}$; para las otras dos constituye el miembro $\mathfrak{N}$. *(N. del T.)*

$$\forall x \forall y F x y \rightarrow \forall x F x x \tag{23}$$

$$\exists x (A \wedge F x) \leftrightarrow A \wedge \exists x F x \tag{24}$$

$$\exists x (A \vee F x) \leftrightarrow A \vee \exists x F x \tag{25}$$

$$\exists x (F x \vee G x) \leftrightarrow \exists x F x \vee \exists x G x \tag{26}$$

$$\exists x (F x \vee A) \leftrightarrow \exists x F x \vee A \tag{27}$$

$$\forall x (F x \vee A) \leftrightarrow \forall x F x \vee A \tag{28}$$

$$\exists x F x x \rightarrow \exists x \exists y F x y \tag{29}$$

$$\exists x \neg \exists y \neg (F x \vee \neg F y). \tag{30}$$

G. GENTZEN [6] dio un primer sistema axiomático del tipo tal que para cada fórmula inferior solamente puede haber un número finito de fórmulas superiores: para ello tomó como base todas las conexiones de «$\neg$», «$\wedge$», «$\vee$», «$\rightarrow$», «$\exists x$» y «$\forall x$», y empleó además un signo auxiliar. Otros sistemas más parecidos al nuestro proceden de K. SCHÜTTE, [26] y [28]. El lector podrá encontrar en HILBERT-BERNAYS [11, § 4] aún otro sistema, provinente de P. BERNAYS, que no posee la característica especial del aquí mencionado y es ciertamente uno de los primeros sistemas axiomáticos establecidos para las expresiones universalmente válidas del cálculo de predicados: en las ediciones anteriores de esta obra empleábamos tal sistema, sobre el que volveremos en el § 5.

§ 5. Teoremas acerca del sistema axiomático

Probaremos ahora ciertos teoremas acerca del sistema presentado que nos evitan tener que realizar *in extenso* el proceso deductivo de cada expresión; estos teoremas tienen la forma siguiente: si ciertas expresiones son deductibles, también son deductibles tales otras expresiones.

TEOREMA I. Si una expresión es deductible, también lo es cualquier otra que proceda de la anterior por *cambio de denominación de las variables ligadas*. Entendemos por cambio de denominación lo siguiente (suponiendo que en la expresión entre un signo universal o un signo de existencia): consiste en sustituir la variable junto al cuantificador y en el interior de todo el campo de afección de éste por otra variable —partimos de la hipótesis de que con este proceso de sustitución se llega también a una expresión, y de que la variable que acabamos de introducir no aparecía antes como libre en el campo de afección del cuantificador del caso.

EJEMPLO. De la expresión «$\exists x F x \rightarrow \exists x F x$» procede por cambio de denominación de la variable ligada esta otra: «$\exists x F x \rightarrow \exists y F y$».

TEOREMA II. Sea una expresión deductible en la que aparezca una variable individual libre; sustituyamos ésta, en todos los lugares en que aparezca, por otra variable individual cualquiera: se llega a una expresión tam-

bién deductible— naturalmente, suponemos que la nueva variable introducida no aparecía ya en forma ligada en ningún sitio de la expresión dada, pues en este caso no se obtendría una expresión.

EJEMPLO. De la expresión «$\exists z F x y z \vee \neg \exists z F x y z$» procede, reemplazando la y por otra variable, «$\exists z F x x z \vee \neg \exists z F x x z$», y del mismo modo «$\exists z F x u z \vee \neg \exists z F x u z$».

Vamos a demostrar ambos teoremas simultáneamente.

Con los cambios indicados en I o II se obtiene, sin duda, una fórmula primaria a partir de otra fórmula primaria. Si estos cambios se ejecutan en una fórmula inferior de (a) o de (b), podemos demostrar la forma así surgida a partir de las fórmulas superiores, cambiadas del modo correspondiente, de (a) o de (b), respectivamente. Lo mismo ocurre con (c) y (d): si en la fórmula inferior de (c) se introduce la variable y reemplazando a una variable individual, en la fórmula superior se sustituirá la variable y por otra variable apropiada; análogamente para (d), en caso de que aquí la variable x de la fórmula inferior se cambie de denominación y pase a llamarse y. Basta continuar este método para obtener de nuevo un proceso deductivo para la fórmula que ha sufrido el cambio a partir de las fórmulas elementales.

Vamos a introducir en lo que sigue el concepto de *nivel* de un proceso deductivo. Un proceso que consta únicamente de una fórmula elemental tiene el nivel 0. Si la fórmula superior de una fórmula de los tipos (a), (c) o (d) se obtiene por un proceso deductivo de nivel n, la fórmula inferior tiene el nivel $n + 1$. Si las fórmulas superiores de una fórmula del tipo (b) se obtienen mediante procesos deductivos de niveles n_1 y n_2, el proceso de la fórmula mencionada tiene un nivel superior en 1 al no menor de los dos números n_1 y n_2.

De la demostración de los teoremas I y II se infiere, por lo demás, que en los cambios citados el nivel del proceso deductivo de las fórmulas permanece invariable.

TEOREMA III. Sea deductible una fórmula $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$; entonces $\mathfrak{M} \vee \neg \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ será también deductible, y el nivel del proceso deductivo de esta segunda fórmula será exactamente superior en una unidad al nivel del proceso de la primera. (En lo que respecta a la regla (a), no suponemos aquí las limitaciones que imponíamos antes a la configuración de $\mathfrak{N}$.)

Si se trata de la regla (a), el teorema es verdadero. En otro caso $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ proviene de una fórmula superior $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_1$ —según (a) o (c)— o de las dos fórmulas superiores $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_2$ y $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_3$ —según (b)—. Supongamos que el teorema es válido para las fórmulas superiores: entonces, a partir de $\mathfrak{M} \vee \neg \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_1$ —o de $\mathfrak{M} \vee \neg \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_2$ y de $\mathfrak{M} \vee \neg \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}_3$— se obtiene la fórmula del caso de acuerdo con la regla, y el proceso deductivo tiene el nivel que habíamos anticipado; de este

modo el teorema se retrotrae al caso de una fórmula elemental $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ en la que sólo haya de considerarse la regla (a).

TEOREMA IV. Si dos fórmulas, $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ son deductibles, también lo será $\mathfrak{M} \vee \neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}$, y precisamente mediante un proceso deductivo cuyo nivel será superior en una unidad al no menor de los niveles de los procesos de deducción de $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$.

TEOREMA V. Sea deductible una fórmula $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{A}(y) \vee \mathfrak{N}$, en la que y no aparezca en $\mathfrak{M}$ ni $\mathfrak{N}$; entonces también será deductible $\mathfrak{M} \vee \neg \exists x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}$, y le corresponderá un nivel superior en 1 al de la fórmula dada.

TEOREMA VI. Si una fórmula $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{A}(y) \vee \mathfrak{N}$ es deductible, también lo será $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}$, con nivel superior en 1 al de la anterior.

Las demostraciones de IV, V y VI son análogas a la de III.

Además se pueden invertir los teoremas III a V del modo siguiente.

TEOREMA III′. Si una fórmula $\mathfrak{M} \vee \neg \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ es deductible, también lo será $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$, y precisamente mediante un proceso deductivo de nivel inferior en la unidad al de aquélla.

La demostración se corresponde con la de III. Análogamente tienen IV y V sus opuestos en IV′ y V′.

TEOREMA VII. Si una expresión que consiste en una disyunción es deductible, también lo será cualquier expresión que proceda de ella por permutación de los miembros disyuntivos, y su proceso deductivo será del mismo nivel que el de la expresión original.

Si la expresión es una fórmula elemental, asimismo será fórmula elemental la expresión que se obtenga con tal permutación; en otro caso, la expresión con los miembros disyuntivos permutados será deductible de acuerdo con III a V o según VI, y con el mismo nivel —si se supone que se cumple el teorema para la fórmula superior.

TEOREMA VIII. Si una expresión $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ es deductible, también lo será $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$, y precisamente mediante un proceso deductivo de nivel no mayor que el de aquélla. ($\mathfrak{M}$ puede asimismo faltar.)

Probaremos este teorema por inducción a partir del nivel del proceso deductivo de $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$.

1. Si $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ es una fórmula elemental, también lo es $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$.

2. El caso en que $\mathfrak{A}$ sea una disyunción se retrotraerá al de una $\mathfrak{A}$ con menos miembros disyuntivos; sea $\mathfrak{A}$ igual a $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$: si $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ es deductible, por el teorema VII también lo será $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}$, y justamente mediante un proceso deductivo del mismo nivel; ahora bien, por hipótesis, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}$ es deductible mediante un proceso de no mayor nivel, y según VII lo mismo ocurre con $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{C}$, luego por hipótesis también lo será $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$.

Podemos, por tanto, limitarnos de ahora en adelante al caso de que $\mathfrak{A}$ no sea una disyunción. Sea n el nivel del proceso deductivo de $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$.

3. Si $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\neg\neg \mathfrak{B}$ o la forma $\neg \exists x \mathfrak{B}(x)$, de acuerdo con III′ y V′, las fórmulas $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}$ o $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B}(y) \vee \neg \mathfrak{B}(z)$, respectivamente, serán deductibles mediante procesos de nivel $n-2$ [puesto que, por hipótesis, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B}$ es deductible por un proceso de nivel $n-2$ a lo más, o bien, según el teorema II, $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B}(y) \vee \neg \mathfrak{B}(y)$ es deductible mediante un proceso de nivel $n-2$, y por hipótesis se tendrá que $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B}(y)$ es deductible con nivel no mayor que el que acabamos de mencionar]; en cualquiera de los dos casos, y de acuerdo con los teoremas III y V, $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$ será deductible mediante un proceso de nivel como máximo igual a $n-1$.

4. Si $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\neg(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$, según el teorema IV′, $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B} \vee \vee \neg \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{C} \vee \neg \mathfrak{C}$ serán deductibles mediante procesos de nivel $n-2$, y, por hipótesis, $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg \mathfrak{C}$ lo serán por procesos de nivel no superior a aquél; en consecuencia, $\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ será deductible mediante un proceso de nivel igual o inferior a $n-1$.

5. Si $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ procede de una fórmula superior $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ o de las fórmulas superiores $\mathfrak{M}_2 \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{M}_3 \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$, los procesos deductivos de estas fórmulas superiores tendrán como máximo el nivel $n-1$. Por hipótesis existe un proceso deductivo que tiene a lo más este nivel para $\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{A}$ o para $\mathfrak{M}_2 \vee \mathfrak{A}$ y $\mathfrak{M}_3 \vee \mathfrak{A}$, respectivamente. En consecuencia existe un proceso deductivo para $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A}$ de nivel igual a n como máximo, ya que estas fórmulas surgen de acuerdo con las reglas de deducción a partir de las fórmulas superiores mencionadas.

6. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\exists x \mathfrak{B}(x)$ y sea $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ una fórmula inferior de (d) —excluyendo los casos ya tratados—. Entonces $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$ procede de $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{B}(x) \vee \mathfrak{B}(y) \vee \exists x \mathfrak{B}(x)$ o de $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{B}(x) \vee \exists x \mathfrak{B}(x) \vee \mathfrak{B}(y)$, en donde los procesos deductivos de estas fórmulas tendrán el nivel $n-1$; y para $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{B}(x) \vee \mathfrak{B}(y)$ se tiene, según el teorema VII y la hipótesis, un proceso de este mismo nivel como máximo, y de nivel n o inferior para $\mathfrak{M} \vee \exists x \mathfrak{B}(x)$.

TEOREMA IX. Si $\mathfrak{A}$ es una fórmula deductible, también lo será $\exists x \mathfrak{B}(x) \vee \vee \mathfrak{A}$, en que $\exists x \mathfrak{B}(x)$ puede ser cualquiera, y el nivel del segundo proceso deductivo no será superior al del primero.

Si se trata de fórmulas elementales es claro que se ha de cumplir esta aserción, pues lo que se origina es otra fórmula elemental. En todas las demás fórmulas este enunciado puede llevarse al caso anterior puesto que se cumplirá en las fórmulas superiores correspondientes.

TEOREMA X. Una disyunción $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ es deductible en caso de que existan una i y una j tales que $\mathfrak{A}_j$ sea igual a $\neg \mathfrak{A}_i$. Haremos una inducción

teniendo en cuenta el número total de veces que aparezcan los signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$, número que ha de ser por lo menos igual a 2.

1. Si el número referido es 2, se trata de una disyunción de la forma $\mathfrak{A}_i \vee \neg \mathfrak{A}_i$, en que $\mathfrak{A}_i$ es una fórmula primaria; por tanto, $\mathfrak{A}_i \vee \neg \mathfrak{A}_i$ es una fórmula elemental, y lo mismo ocurre con $\neg \mathfrak{A}_i \vee \mathfrak{A}_i$.

2. Sea $\mathfrak{A}_i$ una fórmula primaria y aparezca en la disyunción un miembro de las formas $\neg \neg \mathfrak{B}$, $\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ o $\neg \exists x \mathfrak{B}(x)$; en este caso nos encontramos con una fórmula elemental.

3. Supongamos que en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ aparece un miembro disyuntivo de una de las formas, $\neg \neg \mathfrak{B}$, $\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ o $\neg \exists x \mathfrak{B}(x)$, que es diferente de $\mathfrak{A}_i$ y de $\neg \mathfrak{A}_i$. Sustituiremos entonces en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ el miembro $\neg \neg \mathfrak{B}$ por $\mathfrak{B}$, o bien el miembro $\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ una vez por $\neg \mathfrak{B}$ y otra vez por $\neg \mathfrak{C}$, o bien el miembro $\neg \exists x \mathfrak{B}(x)$ por $\neg \mathfrak{B}(y)$ (si es que y no aparece en ninguna otra parte). Puesto que las fórmulas que así se obtienen contendrán tanto $\mathfrak{A}_i$ como $\neg \mathfrak{A}_i$ como miembros disyuntivos, y por otro lado tendrán menos signos, serán deductibles por las hipótesis hechas, y según los teoremas III a V también lo será $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$.

4. Tenga $\mathfrak{A}_i$ la forma $\neg \mathfrak{D}$. Si sustituimos en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ el miembro $\neg \mathfrak{A}_i$ (o sea $\neg \neg \mathfrak{D}$) por $\mathfrak{D}$, en la disyunción a que se llega aparece también $\neg \mathfrak{D}$, luego por hipótesis será deductible, y según el teorema VII ha de serlo asimismo $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$.

5. Tenga $\mathfrak{A}_i$ la forma $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$. Sustituimos en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ el miembro $\neg (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ una vez por $\neg \mathfrak{B}$ y otra vez por $\neg \mathfrak{C}$; las dos fórmulas que se obtienen son deductibles por hipótesis, ya que la primera contiene como miembros disyuntivos $\mathfrak{B}$ y $\neg \mathfrak{B}$, y la segunda $\mathfrak{C}$ y $\neg \mathfrak{C}$: de acuerdo con el teorema IV $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ será deductible.

6. Sea el caso de tener $\mathfrak{A}_i$ la forma $\exists x \mathfrak{D}(x)$ —excluyendo lo ya tratado en 3—. Sustituimos en $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ el miembro $\neg \exists x \mathfrak{D}(x)$ por $\neg \mathfrak{D}(y)$ y el miembro $\exists x \mathfrak{D}(x)$ por $\mathfrak{D}(y)$: la fórmula a que así se llega será deductible por hipótesis, y según los teoremas IX y VII se conservará la deductibilidad cuando se introduzca ante $\mathfrak{D}(y)$ el miembro disyuntivo $\exists x \mathfrak{D}(x)$; según (c) el miembro $\neg \mathfrak{D}(y)$ se puede sustituir por $\neg \exists x \mathfrak{D}(x)$ y según el teorema VI también será deductible $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$.

TEOREMA XI. Si dos expresiones $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ y $\neg \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ son deductibles, también lo ha de ser $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$. (Ha de entenderse que pueden faltar $\mathfrak{G}$ o $\mathfrak{H}$: queda especialmente incluido el caso de que se tenga $\mathfrak{D}$ y $\neg \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$, con los cuales será también deductible $\mathfrak{H}$, o sea es válida la llamada *regla de separación* [6 bis]).

[6 bis] Tanto ésta como la mencionada en el Cap. I, § 9 (regla (c)), corresponden al llamado *modus ponens* de la lógica clásica. *(N. del T.)*

Sean, m el nivel del proceso deductivo de $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$, n el del proceso de $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ y $m + n = k$; y sea además r el número total de los signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que aparezcan en $\mathfrak{D}$. Demostraremos el teorema primeramente para $k = 0$ y $r = 0$; retrotraeremos después la verdad del teorema para cualesquiera k y r, bien a la verdad del mismo para menor r y un k arbitrario, o bien a la del mismo para idéntico r y menor k. Llamaremos *fórmulas auxiliares* a las fórmulas $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ que aparezcan en las reglas de deducción y *fórmulas principales* a las demás que se encuentren en la fórmula superior (o fórmulas superiores) y en la fórmula inferior.

1. Sean $k = 0$ y $r = 0$.

Entonces $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ y $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ son también fórmulas elementales; además, bien $\mathfrak{G}$ es una fórmula elemental o lo es $\mathfrak{H}$, luego $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$ será también una fórmula elemental; en otro caso $\mathfrak{H}$ contiene el miembro disyuntivo $\mathfrak{D}$, de modo que $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$ será asimismo entonces una fórmula elemental.

2. Admitamos que se llega a $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ por (a) ... (d), y sea $\neg\, \mathfrak{D}$ una parte integrante de la fórmula auxiliar correspondiente $\mathfrak{M}$; si $\mathfrak{A}$ es una fórmula superior de $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$, contendrá también la parte $\neg\, \mathfrak{D}$. Por hipótesis la fórmula $\mathfrak{B}$ (que procede de $\mathfrak{A}$ cuando en ella se sustituye $\neg\, \mathfrak{D}$ por $\mathfrak{G}$) será demostrable al serlo $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{A}$, pues el número k será menor en este caso, mientras que r no se habrá alterado. Por poderse demostrar $\mathfrak{B}$ —o dos fórmulas de este tipo— también será demostrable, según III a VI, $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$.

3. Obténgase $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ por (a) ... (d), y sea $\mathfrak{D}$ una parte integrante de la fórmula auxiliar correspondiente $\mathfrak{N}$. Reduciremos este caso, como el 2., a otro de menor k y el mismo r (exceptuando los casos ya tratados).

4. Supongamos que se llega a $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ mediante (a). Entonces $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ tiene la forma $\neg\, \neg\, \mathfrak{E} \vee \mathfrak{H}$, y su fórmula superior será $\mathfrak{E} \vee \mathfrak{H}$; puesto que $\mathfrak{G} \vee \neg\, \mathfrak{E}$ es deductible, por hipótesis (compárese el teorema VII) lo será también $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$, ya que se trata del caso de tenerse un r menor.

5. Lléguese a $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ por medio de (b) a partir de las dos fórmulas superiores $\neg\, \mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$ y $\neg\, \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ (en donde $\mathfrak{D}$ es igual a $\mathfrak{E} \vee \mathfrak{F}$): entonces $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ tiene la forma $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E} \vee \mathfrak{F}$. $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E} \vee \mathfrak{H}$ será deductible por serlo $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E} \vee \mathfrak{F}$ y $\neg\, \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ (menor r); y $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H} \vee \mathfrak{H}$ será deductible juntamente con $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{E} \vee \mathfrak{H}$ y $\neg\, \mathfrak{E} \vee \mathfrak{H}$, si se tienen en cuenta el teorema VII y la hipótesis (menor r); luego, según el teorema VIII, también lo será $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$.

6. Obténgase $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$, según (c), a partir de la fórmula superior $\neg\, \mathfrak{E}(y) \vee \mathfrak{H}$, y sea $\mathfrak{D}$ igual a $\exists x\, \mathfrak{E}(x)$. $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ tendrá la forma $\mathfrak{G} \vee \vee \exists x\, \mathfrak{E}(x)$; si ésta es una fórmula elemental, $\mathfrak{G}$ también habrá de serlo, y $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$ será deductible de acuerdo con el teorema X; si no es así $\mathfrak{G} \vee \exists x\, \mathfrak{E}(x)$ puede proceder solamente de una fórmula superior $\mathfrak{G} \vee \exists x\, \mathfrak{E}(x) \vee \mathfrak{E}(y)$. Puesto que $\neg\, \exists x\, \mathfrak{E}(x) \vee \mathfrak{H}$ es deductible, y también lo es $\mathfrak{G} \vee \exists x\, \mathfrak{E}(x) \vee \vee \mathfrak{E}(y)$, por hipótesis y el teorema VII asimismo lo será $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H} \vee \mathfrak{E}(y)$ (que

tiene menor k e igual r). Partiendo de que $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H} \vee \mathfrak{E}(y)$ y $\neg\, \mathfrak{E}(y) \vee \mathfrak{H}$ son deductibles, por la hipótesis (menor r) lo será también $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H} \vee \mathfrak{H}$ y de acuerdo con el teorema VIII $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{H}$ tiene que ser, igualmente, deductible.

Además, a $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ no se podrá llegar mediante (d), pues si así fuese estaríamos en el caso 2.; queda por tanto, como única posibilidad, que $\neg\, \mathfrak{D} \vee \mathfrak{H}$ sea una fórmula elemental, y entonces $\mathfrak{D}$ será una fórmula primaria. Puesto que ya hemos tratado el caso de ser también $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ fórmula elemental, no cabe sino que que se llegue a $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{D}$ por medio de (a) a (d): pero esto significaría que nos encontramos en el caso 3.

Con lo cual la inducción es ya completa.

TEOREMA XII. A partir de una expresión deductible se obtiene otra también deductible cuando en aquélla *se sustituye una variable proposicional,* en todos los lugares en que aparece, *por una y la misma expresión* —suponemos aquí, naturalmente, que reemplazando de este modo se llega a una expresión; y además sólo estará permitida tal sustitución cuando la expresión sustituyente no contenga ninguna variable individual libre que se encontrase ya en forma ligada en la fórmula de partida.

EJEMPLO. A partir de la fórmula deductible «$A \vee \neg\, A \vee B$» se obtiene por reemplazamiento de A la fórmula «$\forall x \exists y F x y \vee \neg\, \forall x \exists y F x y \vee B$».

Esta proposición es apropiada ante todo para fórmulas elementales, pues al reemplazar como se ha dicho se obtienen expresiones que, de acuerdo con el teorema X, son deductibles. En el caso de efectuarse el reemplazamiento en una fórmula inferior de los tipos (a) a (d), podemos suponer que nos dará el resultado apetecido cuando le apliquemos a la fórmula superior correspondiente (o a las fórmulas superiores correspondientes): entonces la fórmula que se obtenga por reemplazamiento en la fórmula inferior será deductible según los teoremas III a VI.

TEOREMA XIII. Se obtiene una expresión deductible a partir de otra también deductible cuando en ésta se lleva a cabo el *reemplazamiento de una variable predicado.* Se ha de entender por esto último lo siguiente: supongamos que en la expresión del caso, que llamaremos $\mathfrak{A}$, aparezca la variable predicado n-ádica F, y sea $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ una expresión cualquiera que contenga las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ [las demás variables libres que pudieran encontrarse en $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ no han de aparecer en forma ligada en lugar alguno de $\mathfrak{A}$, y además ninguno de los lugares vacíos de F ha de hallarse en $\mathfrak{A}$ ocupado por una variable que aparezca en $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ en forma ligada]; sustituimos ahora en $\mathfrak{A}$ toda fórmula primaria $F\, a_1, \ldots, a_n$ (en la que $a_1, \ldots, a_n$ son variables individuales cualesquiera) por $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ [se obtiene $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ a partir de $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$, sustituyendo, en todos los lugares en que aparece, cada x_i por a_i]. Naturalmente, ha de atenderse

a que al reemplazar las variables predicado se obtenga de nuevo una expresión, sea del tipo que sea.

EJEMPLO. Por reemplazamiento de F en la expresión «$\exists x \forall y (F x x \vee \vee \neg F y y)$» se obtiene esta otra expresión: «$\exists x \forall y (\exists z G x x z \vee \vee \neg \exists z G y y z)$».

La demostración del teorema XIII se lleva a cabo exactamente de la misma manera que la del teorema XII.

TEOREMA XIV. Si es deductible una expresión $\mathfrak{A}(x)$ que contiene la variable libre x, también lo es $\forall x \mathfrak{A}(x)$.

$\forall x \mathfrak{A}(x)$ es un modo abreviado de escribir $\neg \exists x \neg \mathfrak{A}(x)$; puesto que $\mathfrak{A}(x)$ es deductible, según (a) también es deductible $\neg \neg \mathfrak{A}(x)$, y de ésta se llega, por (c), a $\neg \exists x \neg \mathfrak{A}(x)$.

Vamos a presentar ahora el sistema de axiomas de BERNAYS, aludido al final del § 4, para las expresiones universalmente válidas del cálculo de predicados. Este sistema consta de:

1. Fórmulas elementales y reglas que nos permiten deducir las fórmulas universalmente válidas del cálculo de proposiciones. También pueden aceptarse como fórmulas elementales cualesquiera expresiones universalmente válidas del cálculo proposicional cuya validez universal pueda demostrarse, por ejemplo, por el método de evaluación.

2. Además, las fórmulas elementales «$\forall x F x \rightarrow F y$» y «$F y \rightarrow \exists x F x$» [cf. las fórmulas (7) y (8) del § 4].

3. Las reglas de deducción constituidas por los teoremas siguientes (que se admiten axiomáticamente): I (cambio de denominación de las variables ligadas), II (regla de reemplazamiento de variables individuales libres), XII (regla de reemplazamiento de variables proposicionales), XIII (regla de reemplazamiento de variables predicado) y XI (regla de separación), este último en su forma simple de que a partir de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ se puede seguir $\mathfrak{B}$; y aún dos reglas más, a saber: que de $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)$ y $\mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$ se siguen, respectivamente, $\mathfrak{A} \rightarrow \forall x \mathfrak{B}(x)$ y $\exists x \mathfrak{B}(x) \rightarrow \mathfrak{A}$, en caso de que $\mathfrak{A}$ no contenga la variable libre x. [Cf. las fórmulas (4) y (9) del § 4, a partir de las cuales, y teniendo en cuenta los teoremas que hemos demostrado, es fácil llegar a estas reglas.]

De nuestros teoremas se infiere que podemos deducir en nuestro sistema todas las expresiones deductibles en el sistema bernaysiano. Proponemos como ejercicio la no difícil tarea de obtener asimismo la proposición inversa: se trata de deducir en el sistema de BERNAYS las fórmulas elementales del nuestro y obtener con ello la validez de las reglas (a) a (d).

§ 6. La regla de sustitución; formación de la expresión contraria de una dada; el principio de dualidad

Vamos a demostrar en lo que sigue algunos otros teoremas acerca de las fórmulas deductibles en el sistema de axiomas.

TEOREMA XV. Si $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}$ son deductibles, también lo es $\mathfrak{B}$.

La expresión «$A \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \rightarrow B)$» es deductible en nuestro sistema de axiomas, como se prueba por el método del capítulo I, § 9; reemplazando las variables proposicionales se llega a $\mathfrak{A} \rightarrow ((\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B})$, y aplicando dos veces la regla de separación, a $\mathfrak{B}$.

TEOREMA XVI. (*Regla de sustitución.*) Sean $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ expresiones que contengan las variables libres $x_1, \ldots, x_n$, pero ninguna otra variable libre individual; sea además $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ deductible; si se tiene una expresión $\mathfrak{C}$ en la que intervenga $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ como expresión parcial (siendo $a_1, \ldots, a_n$ variables individuales cualesquiera), y si $\mathfrak{C}'$ procede de $\mathfrak{C}$ mediante sustitución de $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ por $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{C}'$ será también una expresión deductible. (En esta sustitución han de observarse las mismas reglas precautorias que eran de rigor al reemplazar una variable predicado.)

Con lo anterior queda implicado, por otra parte, que cuando $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ sea deductible también lo ha de ser $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A}$: si, en efecto, ocurre lo primero, de la fórmula deductible $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}$ se llega, por la regla de sustitución, a la fórmula $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{A}$. Por otra parte, la regla de sustitución es también válida en el caso de que el número n de variables libres sea igual a 0.

Demostramos ahora el teorema XVI por inducción, teniendo en cuenta el número de signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que intervienen en $\mathfrak{C}$ —pero sin contar aquí los signos que puedan estar incluidos en $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$.

Si tal número es 0, $\mathfrak{C}$ tiene la forma $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$; pero entonces $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ procede de $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ mediante reemplazamiento de variables individuales.

2. Tenga $\mathfrak{C}$ la forma $\neg \mathfrak{D}$, en que el signo «$\neg$» no pertenezca a $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$. Por hipótesis $\mathfrak{D} \leftrightarrow \mathfrak{D}'$ es deductible (aquí y en lo que sigue, el apóstrofo o prima significa siempre que la fórmula provista de este signo ortográfico se obtiene a partir de la misma fórmula sin tal signo mediante la sustitución arriba indicada); ahora bien, «$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$» es una fórmula deductible, como puede probarse, p. ej., mediante el método del capítulo I, § 9; reemplazando las variables proposicionales se obtiene la fórmula deductible «$(\mathfrak{D} \leftrightarrow \mathfrak{D}') \rightarrow (\neg \mathfrak{D} \leftrightarrow \neg \mathfrak{D}')$», y puesto que $\mathfrak{D} \leftrightarrow \mathfrak{D}'$ es deductible, según el teorema XI del § 5, también $\neg \mathfrak{D} \leftrightarrow \neg \mathfrak{D}'$ lo es.

3. Tenga $\mathfrak{C}$ la forma $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$. La demostración es paralela a la de 2., sin más que recurrir a las fórmulas proposicionales «$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \vee C \leftrightarrow B \vee C)$»

o «$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (C \vee A \leftrightarrow C \vee B)$» en lugar de hacerlo a la «$(A \leftrightarrow B) \rightarrow$ $\rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$».

4. Tenga $\mathfrak{C}$ la forma $\exists x\, \mathfrak{D}(x)$. Por hipótesis, $\mathfrak{D}(x) \leftrightarrow \mathfrak{D}'(x)$ es deductible; también lo es $\forall x\, (\mathfrak{D}(x) \leftrightarrow \mathfrak{D}'(x))$, de acuerdo con el teorema XIV del § 5; reemplazando F y G en la fórmula deductible «$\forall x\, (F x \leftrightarrow G x) \rightarrow$ $\rightarrow (\exists x\, F x \leftrightarrow \exists x\, G x)$» [fórmula (21) del § 4], se obtiene «$\forall x\, (\mathfrak{D}(x) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \mathfrak{D}'(x)) \rightarrow (\exists x\, \mathfrak{D}(x) \leftrightarrow \exists x\, \mathfrak{D}'(x))$», y finalmente —teniendo en cuenta el teorema IX del § 5— $\exists x\, \mathfrak{D}(x) \leftrightarrow \exists x\, \mathfrak{D}'(x)$.

TEOREMA XVII. (*Formación de la expresión opuesta de una dada.*) Sea $\mathfrak{A}$ una fórmula en la que no aparezcan las abreviaciones [7] «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$», pero en la que puedan encontrarse estas otras: «$\wedge$» y «$\forall x$»; supongamos que cuando en $\mathfrak{A}$ se sustituyen los signos «$\wedge$», «$\vee$», «$\forall$» y «$\exists$» respectivamente por «$\vee$», «$\wedge$», «$\exists$» y «$\forall$», y además se sustituyen, cada fórmula primaria negada por la misma sin negar y cada fórmula primaria no negada por la misma negada, se obtiene $\mathfrak{A}_1$; entonces, $\neg\, \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1$ es deductible.

EJEMPLO. $\neg\, \forall x\, \exists y\, (\neg F x y \vee \exists z\, G x y z) \leftrightarrow \exists x\, \forall y\, (F x y \wedge$ $\wedge\, \forall z\, \neg G x y z)$ es deductible.

(En lo que sigue señalaremos con el subíndice 1 la designación simbólica de toda fórmula que se obtenga, a partir de otra fórmula con la misma designación simbólica que aquélla, pero sin subíndice, del mismo modo que se obtiene $\mathfrak{A}_1$ a partir de $\mathfrak{A}$.) Demostraremos este teorema por inducción, teniendo en cuenta el número total de signos «$\neg$», «$\vee$», «$\wedge$», «$\exists$» y «$\forall$» que entran en $\mathfrak{A}$.

1. Si este número es 0, se trata de una fórmula primaria; la fórmula deductible se obtiene, pues, reemplazando A en «$A \leftrightarrow A$».

2. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\neg\, \mathfrak{B}$; por hipótesis, $\neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1$ es deductible; a partir de la fórmula deductible $\neg\, \neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \neg\, \neg\, \mathfrak{B}$ obtenemos, según la regla de sustitución, $\neg\, \neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \neg\, \mathfrak{B}_1$.

3. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ o la $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$; por hipótesis, tanto $\neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1$ como $\neg\, \mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{C}_1$ son deductibles; a partir de los fórmulas deductibles «$\neg\, (A \vee B) \leftrightarrow \neg\, A \wedge \neg\, B$» y «$\neg\, (A \wedge B) \leftrightarrow \neg\, A \vee \neg\, B$» se llega, mediante reemplazamiento, a $\neg\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \leftrightarrow \neg\, \mathfrak{B} \wedge \neg\, \mathfrak{C}$ y $\neg\, (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \leftrightarrow \neg\, \mathfrak{B} \vee$ $\vee \neg\, \mathfrak{C}$; de acuerdo con la regla de sustitución se obtienen, respectivamente, $\neg\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{C}_1$ y $\neg\, (\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{C}_1$.

4. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\exists x\, \mathfrak{B}(x)$.

Por hipótesis, $\neg\, \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1(x)$ es deductible, y por ello, según el teorema XIV del § 5, $\forall x\, (\neg\, \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1(x))$; utilizando la fórmula deductible

---

[7] Recuérdese lo dicho en el § 4, inmediatamente después de la fórmula (1). (*N. del T.*)

«$\forall x (F x \leftrightarrow G x) \rightarrow (\forall x F x \leftrightarrow \forall x G x)$» [cf. la fórmula (15) del § 4] se sigue de la anterior esta otra: $\forall x \neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{B}_1(x)$; ahora bien, $\forall x \neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \neg \exists x \mathfrak{B}(x)$ es deductible [cf. la fórmula (19) del § 4]. De acuerdo con la regla de sustitución, a partir de $\forall x \neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{B}_1(x)$ se obtiene la fórmula deductible $\neg \exists x \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{B}_1(x)$, que era nuestra tesis.

5. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\forall x \mathfrak{B}(x)$.

Por hipótesis, $\neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1(x)$ es deductible, y por tanto se sigue $\forall x (\neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}_1(x))$; al utilizar la fórmula deductible «$\forall x (F x \leftrightarrow G x) \rightarrow \rightarrow (\exists x F x \leftrightarrow x G x)$» [fórmula (21) del § 4], se obtiene $\exists x \neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \leftrightarrow \exists x \mathfrak{B}_1(x)$; pero además, $\exists x \neg \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \neg \forall x \mathfrak{B}(x)$ es deductible [cf. fórmula (17) del § 4], y, de acuerdo con la regla de sustitución, se llega a $\neg \forall x \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \exists x \mathfrak{B}_1(x)$, o sea a lo que se quería demostrar.

TEOREMA XVIII. (*Principio de dualidad.*) Sea deductible una expresión $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ (tal que ni en $\mathfrak{A}$ ni en $\mathfrak{B}$ aparezcan las abreviaciones «$\rightarrow$» o «$\leftrightarrow$»); si se sustituyen ahora los signos «$\vee$», «$\wedge$», «$\exists$» y «$\forall$» respectivamente por los «$\wedge$», «$\vee$», «$\forall$» y «$\exists$», se obtiene a partir de $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ otra fórmula deductible.

EJEMPLOS. Las fórmulas deductibles «$\exists x \exists y F x y \leftrightarrow \exists y \exists x F x y$» y «$\forall x (F x \wedge G x) \leftrightarrow \forall x F x \wedge \forall x G x$» originan respectivamente, por transformación dual, estas otras fórmulas deductibles: «$\forall x \forall y F x y \leftrightarrow \forall y \forall x F x y$» y «$\exists x (F x \vee G x) \leftrightarrow \exists x F x \vee \exists x G x$».

TEOREMA XIX. Sea $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ una expresión deductible (en la que, como antes, ni $\mathfrak{A}$ ni $\mathfrak{B}$ han de contener «$\rightarrow$» ni «$\leftrightarrow$»); mediante la transformación dual descrita en el teorema anterior, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ darán lugar respectivamente a $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$; entonces, $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ será deductible.

EJEMPLOS. A partir de las fórmulas deductibles «$\exists x F x x \rightarrow \exists x \exists y F x y$» y «$\forall x F x \vee \forall x G x \rightarrow \forall x (F x \vee G x)$» se obtienen, según XIX, estas otras también deductibles: «$\forall x \forall y F x y \rightarrow \forall x F x x$» y «$\exists x (F x \wedge G x) \rightarrow \rightarrow \exists x F x \wedge \exists x G x$».

Los teoremas XVII y XVIII constituyen una generalización de la ley demostrada anteriormente en el cálculo de predicados (capítulo I, § 6); vamos a probar ahora estos dos teoremas. Si $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ es deductible, también lo será $\neg \mathfrak{B} \rightarrow \neg \mathfrak{A}$, ya que «$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$» es una fórmula deductible; admitamos que $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{B}_1$ tienen el mismo significado que en el teorema XVII; entonces, puesto que $\neg \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}_1$ y $\neg \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}_1$ son deductibles, de acuerdo con la regla de sustitución lo será asimismo $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_1$; sustituyamos ahora en esta última fórmula las variables proposicionales y las variables predicados de tal modo que toda fórmula primaria se encuentre sustituida por ella misma, pero negada; esto quiere decir que sustituimos las variables

proposicionales *A, B, C,...* respectivamente por $\neg A$, $\neg B$, $\neg C, \ldots$, y que si aparece además una variable predicado *n*-ádica, toda fórmula primaria $F\,a_1 \ldots a_n$ quedará sustituida por $\neg F\,a_1 \ldots a_n$ (lo cual está de acuerdo con la regla de reemplazamiento para las variables predicado); también podemos sustituir una fórmula primaria negada dos veces por la misma sin negar, de suerte que si $\mathfrak{C}$ es una de tales fórmulas primarias, la deducibilidad de «$\neg\neg A \leftrightarrow A$» lleva consigo la de «$\neg\neg \mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{C}$» (con lo cual solamente necesitamos emplear la regla de sustitución); pero mediante la sustitución de las fórmulas primarias doblemente negadas por las mismas no negadas llegamos precisamente a la expresión cuya deducibilidad constituía la tesis del teorema XIX.

Tomemos, por ejemplo, la fórmula deducible arriba mencionada «$\exists x F x x \rightarrow \exists x \exists y F x y$»; con ella es también deducible «$\neg \exists x \exists y F x y \rightarrow \rightarrow \neg \exists x F x x$»; aplicando el teorema XVII y la regla de sustitución se obtiene «$\forall x \forall y \neg F x y \rightarrow \forall x \neg F x x$», y luego, por reemplazamiento de las variables predicado, «$\forall x \forall y \neg\neg F x y \rightarrow \forall x \neg\neg F x x$»; al eliminar la doble negación de las fórmulas primarias obtenemos «$\forall x \forall y F x y \rightarrow \rightarrow \forall x F x x$».

La demostración de XVIII es enteramente análoga; de la deducibilidad de $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ pasamos a la de $\neg \mathfrak{A} \leftrightarrow \neg \mathfrak{B}$, y en lo demás procedemos como en la demostración de XIX.

§ 7. La forma normal prenexuada; la forma normal de Skolem

Vamos a demostrar en primer lugar otro teorema más sobre expresiones deducibles.

TEOREMA XX. Para toda expresión $\mathfrak{A}$ existe una expresión $\mathfrak{A}'$ tal que los signos de negación que pueden aparecer en ella se referirán únicamente a fórmulas primarias y además $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$ será deducible (ha de entenderse que tanto en la expresión $\mathfrak{A}$ como en la $\mathfrak{A}'$ podrán aparecer las abreviaciones «$\wedge$» y «$\forall x$», pero no las «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$»).

Demostramos este teorema por inducción según el número de los signos «$\neg$», «$\vee$», «$\wedge$», «$\exists$» y «$\forall$» que aparezcan en $\mathfrak{A}$; al mismo tiempo la demostración indica el método a seguir para encontrar la expresión $\mathfrak{A}'$ correspondiente a una expresión dada $\mathfrak{A}$ (en general designaremos con $\mathfrak{C}'$ una expresión que se encuentre en $\mathfrak{C}$ en la misma relación que $\mathfrak{A}'$ con $\mathfrak{A}$).

1. Si $\mathfrak{A}$ no contiene ninguno de los signos arriba mencionados es una fórmula primaria, y la validez del teorema se sigue, en este caso, de ser $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$ deducible.

2. Tenga $\mathfrak{A}$ una de las formas, $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$, $\exists x \mathfrak{B}(x)$ o $\forall x \mathfrak{B}(x)$. Por hipótesis se pueden encontrar expresiones $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{B}'(x)$ tales que

$\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}'(x)$ sean deductibles; con ayuda de la regla de sustitución se sigue la deductibilidad de $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{B}' \vee \mathfrak{C}'$, de $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C} \leftrightarrow \leftrightarrow \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}'$, de $\exists x\, \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \exists x\, \mathfrak{B}'(x)$ o de $\forall x\, \mathfrak{B}(x) \leftrightarrow \forall x\, \mathfrak{B}'(x)$.

3. Tenga $\mathfrak{A}$ la forma $\neg\, \mathfrak{B}$. Por hipótesis, $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{B}'$ es deductible; de aquí se concluye la deductibilidad de $\neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \neg\, \mathfrak{B}'$; según el teorema XVII, $\neg\, \mathfrak{B}' \leftrightarrow \mathfrak{C}$ es deductible (en que $\mathfrak{C}$ tiene la forma deseada); por medio de la regla de sustitución obtenemos, por tanto, $\neg\, \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$, es decir, $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$. Como ejemplo podemos tomar la fórmula utilizada con este mismo fin en el teorema XVII.

En la exposición del cálculo de proposiciones se observó que es posible llevar las expresiones a formas normales conyuntivas o disyuntivas. También en el cálculo de predicados existe cierta forma normal, como se indica con más detalle en el siguiente teorema.

TEOREMA XXI. Para toda expresión $\mathfrak{A}$ que contenga, en general, cuantificadores, existe otra expresión $\mathfrak{B}$ que comienza únicamente por cuantificadores cuyo campo de afección se extiende hasta el final de la expresión, y tal que $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ es deductible ($\mathfrak{B}$ no contiene ningún otro cuantificador además de los indicados).

En este caso decimos que $\mathfrak{B}$ es una *forma normal prenexuada* de $\mathfrak{A}$; mas $\mathfrak{B}$ no está así unívocamente determinada, es decir, existen varias formas normales prenexuadas de $\mathfrak{A}$. En una expresión tal como $\mathfrak{B}$, en la que todos los cuantificadores se encuentran al principio y los campos de afección se extienden hasta el final de la expresión, llamamos *prefijo* de la expresión a la sucesión de los cuantificadores, mientras que se designa con el nombre de *matriz* de la expresión la parte de ésta en que no aparecen cuantificadores. Por lo demás, una expresión del tipo de $\mathfrak{B}$ puede normalizarse aún más: por ejemplo, $\mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ es deductible cuando $\mathfrak{C}$ se obtiene a partir de $\mathfrak{B}$ al llevar la matriz de $\mathfrak{B}$ a una forma normal conyuntiva, o bien disyuntiva; esta deductibilidad se sigue de los resultados obtenidos antes acerca de las formas normales conyuntiva y disyuntiva y de la regla de sustitución.

Damos ahora un método para encontrar, de acuerdo con el teorema XXI, la expresión $\mathfrak{B}$ correspondiente a $\mathfrak{A}$. Por lo pronto, las abreviaciones «→» y «↔« contenidas en $\mathfrak{A}$ se sustituyen por sus significados hasta eliminarlas de esta expresión; según el teorema XX existe para cada $\mathfrak{A}$ una expresión $\mathfrak{A}'$ tal que los signos de negación que en ella aparecen se refieren solamente a fórmulas primarias y de modo que $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$ es deductible; transformamos $\mathfrak{A}'$, mediante un cambio de denominación de las variables ligadas, en una expresión $\mathfrak{A}''$ en la que junto a cada cuantificador se encuentra una variable distinta; modificamos a su vez $\mathfrak{A}''$ de modo que los cuantificadores que aparecían en un orden de sucesión determinado en $\mathfrak{A}''$ se encuentren ahora, en el mismo orden, colocados al comienzo de la expresión y con todos los campos

de afección extendiéndose hasta el final de ésta: $\mathfrak{B}$, la expresión que se obtiene con tal proceso, es la que deseábamos.

Para la demostración basta únicamente hacer patente que $\mathfrak{A}'' \leftrightarrow \mathfrak{B}$ es deductible. A continuación designaremos con $\mathfrak{C}_1$ una expresión tal que proceda de una expresión cualquiera $\mathfrak{C}$ del mismo que $\mathfrak{B}$ procede de $\mathfrak{A}''$. Haremos una inducción basados en el número de signos «$\exists$» y «$\forall$» que aparezcan en $\mathfrak{A}''$.

1. Tenga $\mathfrak{A}''$ una de las formas $\exists x\, \mathfrak{C}(x)$ o $\forall x\, \mathfrak{C}(x)$. Si $\mathfrak{C}(x)$ no contiene cuantificadores, $\mathfrak{B}$ es igual a $\mathfrak{A}''$; de otro modo, por hipótesis, $\mathfrak{C}(x) \leftrightarrow \mathfrak{C}_1(x)$ será deductible; apoyándose en la regla de sustitución se obtienen respectivamente $\exists x\, \mathfrak{C}(x) \leftrightarrow \exists x\, \mathfrak{C}_1(x)$ o $\forall x\, \mathfrak{C}(x) \leftrightarrow \forall x\, \mathfrak{C}_1(x)$, y la expresión $\mathfrak{B}$ es, en uno u otro caso, $\exists x\, \mathfrak{C}_1(x)$ o $\forall x\, \mathfrak{C}_1(x)$.

2. No tenga $\mathfrak{A}''$ ni la forma $\exists x\, \mathfrak{C}(x)$ ni la $\forall x\, \mathfrak{C}(x)$; tenemos entonces las fórmulas deductibles.

$$A \vee \exists x F x \leftrightarrow \exists x (A \vee F x), \qquad A \vee \forall x F x \leftrightarrow \forall x (A \vee F x),$$
$$A \wedge \exists x F x \leftrightarrow \exists x (A \wedge F x), \qquad A \wedge \forall x F x \leftrightarrow \forall x (A \wedge F x),$$
$$\exists x F x \vee A \leftrightarrow \exists x (F x \vee A), \qquad \forall x F x \vee A \leftrightarrow \forall x (F x \vee A),$$
$$\exists x F x \wedge A \leftrightarrow \exists x (F x \wedge A), \qquad \forall x F x \wedge A \leftrightarrow \forall x (F x \wedge A).$$

Al efectuar los reemplazamientos apropiados de las variables proposicionales y de las variables predicados en estas fórmulas, llegamos a unas fórmulas deductibles con ayuda de las cuales podemos desplazar el primer cuantificador de $\mathfrak{A}''$ al comienzo de la expresión y extender su campo de afección hasta abarcar la totalidad de la misma: con ello nos encontramos retrotraídos al caso 1.

La forma normal prenexuada tiene la ventaja de que en las investigaciones generales del cálculo de predicados es posible limitar radicalmente el campo de las fórmulas que se han de considerar. En todo caso, las posibilidades del prefijo de una expresión que se encuentra en la forma normal prenexuada son tan amplias que producen confusión. A este respecto es interesante un resultado obtenido por TH. SKOLEM [30], que coordina a cada expresión $\mathfrak{A}$ otra $\mathfrak{B}$ en la forma normal prenexuada y construida de tal modo que todos los signos de existencia preceden a los signos universales; desde luego $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ ya no es deductible, sino que sólo la deductibilidad de $\mathfrak{A}$ y de $\mathfrak{B}$ se exigen mutuamente. El teorema de SKOLEM se expresa, pues, del modo siguiente (formulándole del modo como lo necesitamos nosotros):

TEOREMA XXII. Para cada expresión $\mathfrak{A}$ del cálculo de predicados puede darse otra $\mathfrak{B}$ que tiene la forma normal prenexuada y en cuyo prefijo los signos de existencia preceden a los signos universales, y de modo que $\mathfrak{A}$ será deductible siempre y únicamente cuando $\mathfrak{B}$ sea deductible.

Decimos de toda expresión $\mathfrak{B}$ del tipo mencionado que es una expresión en la *forma normal skolemiana*. De acuerdo con el teorema XXI basta dar la demostración para expresiones $\mathfrak{A}$ en la forma normal prenexuada; podemos además limitarnos a expresiones que no contengan variables individuales libres: pues según el teorema XIV del § 5, $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$ es deductible al serlo la expresión $\mathfrak{A}(x)$ que sólo contiene la variable individual libre x. Además, por reemplazamiento en la fórmula deductible «$\forall x\, F x \to F y$» [cf. la fórmula (7) del § 4] obtenemos la otra fórmula asimismo deductible $\forall x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(y)$ (en la que, en caso de que no constituyera una expresión, podría colocarse en lugar de y cualquier otra variable); de acuerdo con la regla de separación, $\mathfrak{A}(y)$ es deductible al serlo $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$, y según el teorema II del § 5 también lo será $\mathfrak{A}(x)$; por tanto, la deductibilidad de una expresión con variables libres significa lo mismo que decir que es deductible la expresión que se obtiene a partir de la dada cuando en ésta se colocan en un orden cualquiera al comienzo del prefijo los signos universales que corresponden a aquellas variables libres.

Llamaremos grado de una de tales fórmulas al número de signos universales a los cuales sigan signos de existencia; demostraremos nuestro teorema por inducción teniendo en cuenta el grado de la fórmula que se ha de transformar.

Si el grado de $\mathfrak{A}$ es 0, no hay que demostrar nada, ya que la expresión tiene ya la forma normal skolemiana. Sea ahora n ($n \neq 0$) el grado de $\mathfrak{A}$, y comience el prefijo de $\mathfrak{A}$ por m ($m \geqq 0$) signos de existencia; por tanto, $\mathfrak{A}$ tendrá la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y\, \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)$, en que $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)$ será una expresión en la forma normal prenexuada que contenga como únicas variables individuales libres $x_1, \ldots, x_m, y$, y cuyo prefijo contenga por lo menos un signo de existencia, ya que de otro modo $\mathfrak{A}$ se encontraría ya en la forma normal skolemiana. (En el caso de ser $m = 0$ habría que prescindir en todo lo que sigue de los cuantificadores $\exists x_1 \ldots \exists x_m$ y de las variables $x_1, \ldots, x_m$). Sea ahora H una variable predicado con $m + 1$ lugares vacíos, que no aparezca en $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)$, y sea $\mathfrak{D}$ un modo abreviado de escribir la expresión $\exists x_1 \ldots \exists x_m [\exists z (\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z) \wedge \neg H x_1 \ldots x_m z) \vee \vee \forall y\, H x_1 \ldots x_m y]$; afirmamos, entonces, que $\mathfrak{D}$ es deductible cuando $\mathfrak{A}$ es deductible, y sólo en este caso.

En primer lugar, sea $\mathfrak{D}$ deductible. Por reemplazamiento de la variable predicado H obtenemos la fórmula deductible.

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m [\exists z (\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z) \wedge \neg \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z)) \vee \vee \forall y\, \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)].$$

Ahora bien, $(\exists z (F z \wedge \neg F z) \vee A) \leftrightarrow A$ es una fórmula deductible, como puede comprobarse basándose en nuestro sistema de axiomas; mediante reemplazamiento se llega a

$$\exists z \left(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z) \wedge \neg \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z)\right) \vee \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y),$$

y teniendo en cuenta la regla de sustitución,

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m [\exists z \left(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z) \wedge \neg \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z)\right) \vee$$
$$\vee \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)] \leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y).$$

Por tanto, $\mathfrak{A}$ es también deductible.

Sea ahora $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y)$ deductible; como «$\forall y (F y \rightarrow G y) \rightarrow (\forall y F y \rightarrow \forall y G y)$» [cf. la fórmula (14) del § 4] y «$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow \neg A \vee C)$» son deductibles, por reemplazamiento de las variables proposicionales de la última fórmula se obtiene

$$\text{«}(\forall y (F y \rightarrow G y) \rightarrow (\forall y F y \rightarrow \forall y G y)) \rightarrow$$
$$\rightarrow (\forall y F y \rightarrow \neg \forall y (F y \rightarrow G y) \vee \forall y G y)\text{»},$$

de modo que, según la regla de separación, se sigue «$\forall y F y \rightarrow \neg \forall y (F y \rightarrow G y) \vee \forall y G y$». Utilizando la regla sobre la formación de la expresión opuesta de una dada y la regla de sustitución, se tiene «$\forall y F y \rightarrow \exists y (F y \wedge \neg G y) \vee \forall y G y$», y reemplazando las variables predicado llegamos a

$$\forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \rightarrow \exists y \left(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg H x_1 \ldots x_m y\right) \vee$$
$$\vee \forall y H x_1 \ldots x_m y.$$

Según el teorema XIV podemos anteponer a esta fórmula $\forall x_m$; al efectuar un reemplazamiento en la fórmula «$\forall x (F x_m \rightarrow G x_m) \rightarrow (\exists x_m F x_m \rightarrow \rightarrow \exists x_m G x_m)$» [cf. la fórmula (20) del § 4], y con ayuda con la regla de separación se encuentra $\exists x_m \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \rightarrow$
$\rightarrow \exists x_m [\exists y \left(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg H x_1 \ldots x_m y\right) \vee \forall y H x_1 \ldots x_m y]$ como fórmula deductible. Al reiterar el último proceso se obtiene la deductibilidad de $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \rightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_m [\exists y \left(\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, y) \wedge \neg H x_1 \ldots x_m y\right) \vee \forall y H x_1 \ldots x_m y]$. Puesto que $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y \mathfrak{C}(x_1, \ldots \ldots, x_m, y)$ es deductible, según la regla de separación también lo será la parte de ella que está situada detrás del signo «$\rightarrow$»; y de esta última fórmula procede $\mathfrak{D}$ por cambio de denominación de una variable ligada.

Hemos demostrado con lo anterior que la deductibilidad de $\mathfrak{A}$ y la de $\mathfrak{D}$ se exigen mutuamente. Llevamos ahora $\mathfrak{D}$ a la forma normal prenexuada cuyo prefijo comienza por $\exists x_1 \ldots \exists x_m \exists z$; a continuación vienen todos los signos universales y de ser [8] de $\mathfrak{C}(x_1, \ldots, x_m, z)$, con su orden inalterado, y final-

[8] Es decir, de existencia. *(N. del T.)*

mente el signo universal $\forall y$. El grado de la fórmula que así se obtiene es inferior en una unidad al de $\mathfrak{A}$, puesto que al signo universal $\forall y$ no sigue ya ningún signo de existencia; por hipótesis podemos llevar esta fórmula a la forma normal skolemiana, y con ello se completa la inducción.

Demos, como ejemplo sencillo, la forma normal de SKOLEM de $\forall x \exists y \exists z F x y z$: se transforma esta fórmula por lo pronto [9] en «$\exists u (\exists y \exists z F u y z \wedge \neg H u) \vee \forall x H x$», forma normal prenexuada que da

$$\text{«}\exists u \exists y \exists z \forall x ((F u y z \wedge \neg H u) \vee H x)\text{»}$$

como forma normal skolemiana.

§ 8. La compatibilidad, la independencia y la completitud [10] del sistema axiomático

Las preguntas que se plantean siempre de nuevo tan pronto como se ha establecido un sistema axiomático, son las concernientes a la *compatibilidad, independencia* y *completitud* del sistema. En primer lugar, en lo que se refiere a la cuestión acerca de la compatibilidad del sistema de axiomas dado en el § 4, podrá parecer en este caso carente de sentido o al menos tal que toda contestación positiva adolecería de circularidad: y la razón de ello sería que se trata de un sistema axiomático para la lógica, y que toda investigación de la compatibilidad opera también con medios lógicos. Mas en este caso, visto con mayor exactitud, se trata de un sistema axiomático para el cálculo de predicados. Estaría justificado rechazar una demostración de la compatibilidad si en ella se operase con los medios de la lógica de predicados: pues, en general, cuando se emprende la demostración de la compatibilidad se supone, al menos metódicamente, que se duda de la compatibilidad (no contradicción) del sistema establecido. Muy otra es la situación, sin embargo, cuando es posible realizar tal demostración con medios más primarios, como ocurre en este caso: en el sistema que hemos establecido podemos no tener en cuenta en absoluto el significado de las expresiones en cuya deducción nos ocupamos; se trata únicamente de un operar formal con ciertos complejos de símbolos, comparable en cierto modo a un juego en el que las diferentes figuras se hubieran intercambiado con arreglo a ciertas leyes; para los razonamientos sobre tal operar no necesitamos ninguna lógica de predicados.

---

[9] Obsérvese que en este ejemplo $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\forall x \mathfrak{G}(x)$ [o, lo que es lo mismo, $\forall y \mathfrak{G}(y)$]: o sea, que $\exists y \exists z F x y z$ es la expresión que en la demostración del teorema se designaba por $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_m, y)$, pero en ella $m = 0$. (*N. del T.*)

[10] Traducimos «compatibilidad», como suele hacerse, aun a costa de perder la fuerza de la expresión alemana (lit., *libertad de contradicción);* utilizamos el neologismo «completitud» de Ferrater-Leblanc, ya que «saturación» e «integridad» (muy difundida esta última) no nos parecen suficientemente fieles. (*N. del T.*)

Para poder acometer la cuestión de la compatibilidad hemos de dar previamente una definición de incompatibilidad [lit., *contradicción*]; se entiende usualmente por ella que es posible deducir a la vez dos expresiones $\mathfrak{A}$ y $\neg\,\mathfrak{A}$: realmente, tal cosa sería funesta, pues como $A \to (\neg\, A \to B)$ es una fórmula deductible, también lo es $\mathfrak{A} \to (\neg\,\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, en que $\mathfrak{B}$ es una expresión cualquiera, y aplicando dos veces la regla de separación obtendríamos también la fórmula arbitraria $\mathfrak{B}$ como fórmula deductible; esto significa que todo el cálculo quedaría condenado a la falta de sentido, puesto que sería posible deducir en él todas las expresiones. Podemos, por tanto, adoptar igualmente como definición de la compatibilidad formal el que puedan darse fórmulas que no son deductibles; llegamos, pues, a la siguiente definición de compatibilidad: *se dice que un sistema axiomático es compatible cuando no es deductible la expresión «A».*

Pero la compatibilidad en este sentido se obtiene inmediatamente: pues «*A*» no es una fórmula elemental y además tampoco puede ser una fórmula inferior de ninguna de las reglas (a) ... (d), ya que toda fórmula inferior de este tipo ha de contener al menos uno de los signos «$\neg$», «$\vee$» o «$\exists$».

Volvámonos ahora a la cuestión de la *independencia* del sistema axiomático. Hemos de entender con ello que no se puede suprimir ninguna de las reglas (a) ... (d) sin arriesgar la situación de las fórmulas deductibles, y que tampoco es posible eliminar las fórmulas elementales. Ambas cosas son fáciles de observar. Sin duda, sin la regla (a) no podría deducirse ninguna expresión de la forma $\neg\,\neg\,\mathfrak{A}$, y por tanto tampoco la expresión que de otro modo sería deductible, «$\neg\,\neg\,(A \vee \neg\, A)$»; sin la regla (b) no cabría deducir ninguna expresión de la forma $\neg\,(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$, y por ello tampoco la expresión —deductible en otro caso— «$\neg\,((A \wedge \neg\, A) \vee (A \wedge \neg\, A))$». Sin la regla (c) no sería posible deducir expresión alguna de la forma $\neg\,\exists\, x\, \mathfrak{A}\,(x)$, y en consecuencia tampoco la expresión «$\neg\,\exists\, x\,(F\,x \wedge \neg\, F\,x)$», que si no fuera así sería deductible. Finalmente, sin (d) no hay posibilidad de deducir la expresión «$\exists\, x\, F\,x \vee \neg\, F\,y$», que si no se impone esta condición es deductible. No podemos eliminar las fórmulas elementales, ya que en tal caso careceríamos de punto de partida para los procesos deductivos; dejaremos indecisa la cuestión acerca de si podría restringirse de algún modo el campo de las fórmulas elementales admitidas: en todo caso, tal restricción difícilmente llevaría consigo una formulación sencilla del sistema de axiomas.

La *completitud* de un sistema axiomático puede definirse de diversas maneras. Podemos adoptar como definición formal rigurosa la siguiente: un sistema se llama completo cuando lleva a una contradicción formal siempre que se introduzca, como fórmula elemental adicional, una fórmula no deductible. En nuestro caso no existe tal completitud: tomemos la expresión «$\neg\, F\,x \vee F\,y$», que no es deductible, ya que ni es una fórmula elemental ni puede ser fórmula inferior de ninguna de las reglas (a) a (d); si introducimos

ahora «$\neg F x \vee F y$» entre las fórmulas elementales, el sistema continúa siendo compatible, pues siguen siendo válidos los razonamientos por los cuales mostramos antes que la expresión «A» no puede deducirse. Pero tal falta de completitud de este sistema axiomático depende enteramente, para satisfacernos, de la intención que liguemos al sistema: pues la fórmula «$\neg F x \vee F y$» es válida-1, pero no válida-2 o más, y por tanto no es válida universalmente; pero nuestro sistema axiomático estaba pensado como tal para expresiones universalmente válidas, de manera que en lo que respecta a «$\neg F x \vee F y$» no varía en modo alguno la situación si a la fórmula elemental «$\neg F x \vee F y$» añadimos incluso las reglas [11] del sistema axiomático que se han deducido en el § 5.

Definiremos la completitud de este sistema axiomático, conforme al sentido común, exigiendo de él que el concepto de fórmula deductible y el de fórmula universalmente válida tengan la misma extensión; esto, por otra parte, no puede mostrarse con razonamientos puramente formales, sino que hemos de recurrir al concepto de validez universal que habíamos desarrollado en el § 3 (concepto que tenía en cuenta el contenido). Habíamos señalado ya en el § 4 que todas las fórmulas deductibles son también universalmente válidas; hemos de mostrar asimismo que una fórmula no deductible tampoco es universalmente válida: según el teorema XXII del § 6, podemos para ello limitarnos a señalar que una fórmula no deductible en la forma normal skolemiana no es universalmente válida. Veamos primero un caso especial.

1. Sea $\mathfrak{A}$ una expresión sin cuantificadores y no deductible. Ascendemos sucesiva y reiteradamente, a partir de $\mathfrak{A}$, a las posibles fórmulas superiores, con lo cual se recorrerá un número finito de pasos, ya que en el ascenso a la fórmula superior [solamente se utilizan las reglas (a) y (b)] el número de signos disminuye; las últimas fórmulas superiores no son todas deductibles, pues si así fuese también lo sería $\mathfrak{A}$; si consideramos una de estas fórmulas superiores no deductibles, vemos que consistirá en una disyunción de fórmulas primarias negadas y no negadas (pero en ella no puede aparecer una y la misma fórmula primaria una vez negada y otra sin negar, pues tal fórmula superior no es una fórmula elemental). Tomemos ahora un campo de individuos que conste de tantos elementos como variables individuales diferentes aparezcan en la fórmula; sustituyendo cada variable individual por un elemento diferente de este campo, podemos sustituir después las variables proposicionales por «$\forall$» o «$\wedge$», y asimismo las variables predicado por predicados determinados del campo de individuos, de modo que toda fórmula primaria no negada reciba el valor «$\wedge$», y toda fórmula primaria negada el valor «$\forall$»; esto quiere decir que, con esta sustitución, la expresión total será

---

[11] Es decir, los teoremas. (*N. del T.*)

falsa, y por tanto no será universalmente válida. Ahora bien, según desarrollamos en el capítulo I, § 9, las reglas (a) y (b) están construidas de tal modo que la fórmula inferior de (a) únicamente puede ser válida universalmente si lo es la fórmula superior, y que para que ocurra lo mismo con la fórmula inferior de (b) han de ser universalmente válidas las dos fórmulas superiores. Basta aplicar esto a nuestro caso para obtener que $\mathfrak{A}$ no tiene validez universal.

2. Sea $\mathfrak{A}$, es decir, $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$, no deductible (incluimos en los razonamientos que siguen el caso de ser $k = 0$ o $l = 0$). Entendemos por $\mathfrak{C}(u_1, \ldots, u_k)$ la disyunción cuyos miembros son $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$, $\exists x_2 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(u_1, x_2, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$, $\exists x_3 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$, $\ldots$, $\exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_k; y_1, \ldots, y_l)$.

Hacemos notar, además, que es posible numerar los acervos-k $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})$ formados con la serie ilimitada de las variables individuales $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$, es decir, que es posible ordenarlos en una sucesión: en el primer lugar se encuentra el acervo-k cuya suma de índices $i_1 + \ldots + i_k$ es igual a 0, o sea el acervo-k $(z_0, \ldots, z_0)$; luego vienen los acervos-k en los que se tiene la suma de índices $i_1 + \ldots + i_k = 1$, que a su vez pueden ordenarse según una sucesión natural: lo cual quiere decir que el primero de ellos será el acervo-k $(z_0, \ldots, z_0, z_1)$, el segundo $(z_0, \ldots, z_0, z_1, z_0)$, etc., hasta llegar a $(z_1, z_0, \ldots, z_0)$; siguen después los acervos-k con suma de índices 2, ordenados según una sucesión natural; a continuación los que tienen la suma de índices 3, luego 4, etc. Designaremos con $(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k})$ el enésimo acervo-k de esta sucesión, y entenderemos por $\mathfrak{D}_n$ la fórmula $\mathfrak{B}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}; z_{(n-1)l+1}, z_{(n-1)l+2}, \ldots, z_{nl})$; observaremos que las variables individuales que se encuentran después del punto y coma en esta última fórmula son distintas de las que se hallan delante de tal signo ortográfico, así como también distintas de todas las variables individuales que aparezcan en una fórmula $\mathfrak{D}_p$ con $p < n$; mas, por el contrario, para $n > 1$ todas las variables individuales $z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}$ aparecen también en una fórmula $\mathfrak{D}_p$ con $p < n$ [12]. Llamaremos $\mathfrak{E}_n$ a la fórmula $\mathfrak{C}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}) \vee \mathfrak{D}_n$ [13]. Afirmamos en primer término lo siguiente:

a) Para todo n, la disyunción $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$ no es deductible.

---

[12] La primera observación es, en realidad, una condición que puede siempre imponerse al definir $\mathfrak{D}_n$; es necesaria para poder aplicar el Teorema V a la prueba del apartado a), ya que en $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ entrarán, además de $\mathfrak{D}_n$, las fórmulas $\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_{n-1}$ (como miembros disyuntivos). *(N. del T.)*

[13] En que $\mathfrak{C}(z_{n_1} \ldots z_{n_k})$ es, evidentemente, la fórmula $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \vee \exists x_2 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(z_{n_1}, x_2, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \vee \vee \ldots \vee \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_{k-1}}, x_k; y_1, \ldots, y_l)$; obsérvese que en cada una de las fórmulas $\mathfrak{C}(z_{1_1}, \ldots, z_{1_k}), \ldots, \mathfrak{C}(z_{(n-1)_1}, \ldots, z_{(n-1)_k}), \mathfrak{C}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k})$, el primer miembro disyuntivo es precisamente $\mathfrak{A}$. *(N. del T.)*

Según los teoremas VII y IX del § 5, a la deductibilidad de $\mathfrak{D}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$ acompañaría la de $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$; basta, pues, mostrar que $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ no es deductible.

Haremos patente tal cosa mediante una inducción relativa a n. Si $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ fuese deductible, es decir, si lo fuera $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{n-1} \vee \mathfrak{C}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}) \vee \mathfrak{B}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}; z_{(n-1)l+1}, \ldots, z_{nl})$, deberíamos considerar fórmula deductible asimismo, según los teoremas II y V del § 5[14], $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{n-1} \vee \mathfrak{C}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}) \vee \mathfrak{A}\, y_1 \ldots \mathfrak{A}\, y_l\, \mathfrak{B}(z_{n_1}, \ldots, z_{n_k}; y_1, \ldots, y_l)$ y también lo sería $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{n-1} \vee \mathfrak{A}$ (por aplicación reiterada del teorema VI del § 5), y utilizando los teoremas VII y VIII del § 5 resultaría serlo también $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_{n-1}$; al continuar este proceso llegaríamos a obtener que si $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ fuese deductible, también debería serlo $\mathfrak{A}$; pero como $\mathfrak{A}$ no es deductible, $\mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ no lo será, y por ello tampoco será deductible $\mathfrak{D}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$.

b) Puesto que $\mathfrak{D}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$ no es deductible, de acuerdo con 1. no será válida universalmente, y existirá una sustitución de las variables proposicionales, variables individuales y variables predicado en el campo de los números $(0, 1, \ldots, n \cdot l)$ que adjudique a esta fórmula el valor «falso»; como se infiere de 1., en esta sustitución pueden sustituirse las variables individuales $z_0, z_1, z_2, \ldots$ por $0, 1, 2, \ldots$; nos es posible escoger para cada n un sistema determinado de sustituciones que sea falsificador de $\mathfrak{D}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$, al cual llamaremos Φ_n.

Presentamos ahora una sustitución de las variables proposicionales y de las variables predicado de $\mathfrak{A}$ en el campo de los números enteros no negativos; esta sustitución ha de llevarse a cabo de tal modo que a cada variable proposicional corresponda el valor «$\vee$» o el valor «$\wedge$», y además a cada fórmula $F\alpha_1 \ldots \alpha_p$ (en que F es un predicado p-ádico y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ son números cualesquiera) ha de coordinársele el valor «$\vee$» o el «$\wedge$«; podemos ordenar en una sucesión numerable determinada estas fórmulas individuales a las que hay que asignar valores veritativos, para lo cual es conveniente designar con $A_1, \ldots, A_r$ las variables proposicionales, y con $F_1, \ldots, F_s$ las variables predicados. Formaremos del siguiente modo la sucesión mencionada: en el primer lugar están $A_1, \ldots, A_r$; luego vienen fórmulas en las que se

---

[14] Puede basarse esta consideración exclusivamente en el Teorema V, pero formulado con alguna mayor generalidad (para lo cual se requieren los Teoremas I y II): en este caso, el V generalizado ha de aplicarse reiteradamente, considerando aquí el último miembro disyuntivo como «$\neg\, \mathfrak{A}(y)$»: en cada paso una de las variables libres situadas detrás del punto y coma (que corresponderá a la variable y de «$\neg\, \mathfrak{A}(y)$») da lugar a una de las variables $y_1, \ldots, y_l$, ligada mediante el signo $\exists$ (que corresponderá a la variable x en la formulación original del Teorema V); además, tras cada aplicación de este teorema debe tenerse en cuenta que $\neg\, \exists\, x \neg\, \mathfrak{A}(x)$ puede escribirse abreviadamente $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$ (como se ha indicado al final del § 3 y en otros lugares). (*N. del T.*)

trata de la determinación del valor de las variables predicados para el objeto 0, y entre ellas primero las fórmulas con F_1, luego con $F_2, \ldots, F_s$ (y es posible ordenar en sucesión natural en el interior de cada grupo); a continuación llega la determinación de los valores de las variables predicado para los objetos 0 y 1 (mientras estos valores no se hayan fijado ya antes), y en el interior de estas fórmulas individuales se ordenará lo mismo que antes; luego se tienen las fórmulas en las que trata de la determinación de los valores de las variables predicado para los objetos 0, 1, 2; etc. (Por lo demás, cualquier otro orden de sucesión serviría lo mismo.)

Ahora se emprende la evaluación de las fórmulas citadas del modo siguiente. En caso de que la primera fórmula reciba el valor «V» para un número infinito de Φ_n, ha de asignársele el valor «V», y en caso contrario el «Λ». Se determinan los valores veritativos para las primeras n fórmulas de este tipo; en caso de que la $(n+1)$-ésima fórmula reciba el valor «V» para un número infinito de Φ_n (para los cuales las n primeras fórmulas hayan obtenido los valores veritativos establecidos), se le asignará el valor «V», y en caso contrario el «Λ».

Sostenemos ahora que $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ recibe, con esta sustitución en el campo de los números enteros no negativos, el valor «Λ». De hecho, si tomamos un acervo-k cualquiera $(n_1, \ldots, n_k)$ de números, $\mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_k; (n-1) \cdot l + 1, \ldots, n \cdot l)$ será falsa para todo Φ_n que lo abarque [15], y por tanto lo será con la sustitución en el campo de los números enteros no negativos; en consecuencia, $\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ será verdadera con esta sustitución [16], o, lo que es lo mismo, $\neg \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ será falsa, es decir, $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ será falsa.

Por tanto, la fórmula $\mathfrak{A}$ no es universalmente válida, ya que no lo es en el campo de los números enteros no negativos; con ello hemos demostrado la completitud del sistema de axiomas.

Podemos, pues, utilizar de ahora en adelante los conceptos «expresión deductible en el sistema» y «expresión universalmente válida» como equivalentes. Un ejemplo serán los teoremas deducidos en los §§ 5 a 7 en los que se sustituya la palabra «deductible» por «universalmente válida».

---

[15] Pues se tratará de uno de los miembros disyuntivos de $\mathfrak{D}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_n$, que, evidentemente, han de ser todos falsos para cada Φ_n. (*N. del T.*)

[16] En efecto: con tal sustitución, $\neg \mathfrak{B}(n_1, \ldots, n_k; (n-1)\,l+1, (n-1)\,l+2, \ldots, nl)$ será verdadera dentro de todo el campo de los números enteros no negativos $0, \ldots, nl$; pero, por no tener cuantificadores, será deductible, según 1. (siempre dentro de la sustitución a que nos referimos); basta aplicar reiteradamente el Teorema V y luego pasar de los signos de existencia a los universales para obtener lo que se afirma en el texto. La equivalencia que sirve para «pasar» de unos a otros signos, aplicada múltiplemente, lleva también de la fórmula que se da a continuación en el texto a la siguiente, es decir, a aquélla cuya falsedad queríamos demostrar. (*N. del T.*)

Hemos visto que una fórmula no deductible, es decir, no universalmente válida, no es válida en el campo de los números enteros no negativos (en lugar de este campo podríamos haber tomado el de los números naturales, ya que el campo de estos últimos procede del campo de los números enteros no negativos por un simple cambio de denominación); pero miradas las cosas rigurosamente, hemos mostrado esto únicamente para las fórmulas que se encuentran en la forma normal skolemiana, para las cuales es suficiente la demostración de completitud dada arriba; para demostrar de modo completo que una expresión no universalmente válida no es válida en el campo de los números enteros no negativos necesitamos además el siguiente teorema:

TEOREMA XXIII. Para toda expresión $\mathfrak{A}$ puede darse otra $\mathfrak{B}$ en la forma normal skolemiana y tal que $\mathfrak{A}$ sea válida en un campo determinado cualquiera siempre que $\mathfrak{B}$ lo sea en ese mismo campo, y solamente en este caso.

La demostración de este teorema no presenta ninguna dificultad si seguimos la del teorema XXII y nos damos cuenta de que podemos sustituir «deductible» por «universalmente válida» y de que la validez universal implica la validez en todo campo. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA XXIV. Si una expresión es válida en el campo de los números naturales, es universalmente válida. [Es posible expresar esto también con el concepto «cumplible» (cf. el § 3), y entonces el teorema dice así: si una expresión es cumplible en general, también lo es en el campo de los números naturales].

Este último teorema, tan importante, que aquí se ha sacado como una consecuencia de nuestra demostración de completitud, puede obtenerse por sí mismo de un modo más sencillo; le demostró primeramente L. LÖWENHEIM [20] y luego —con mucha mayor sencillez— TH. SKOLEM [30], por lo cual se le llama también teorema de *Löwenheim-Skolem.*

Haremos notar que K. GÖDEL [7] mostró por primera vez de modo explícito la completitud del cálculo de predicados, aun cuando estaba ya contenida en las investigaciones de J. HERBRAND [10]; L. HENKIN [9] y K. SCHÜTTE [28] han dado posteriormente otras demostraciones de tal completitud.

§ 9. El cálculo de predicados con inclusión de la identidad

El cálculo de predicados con inclusión de la identidad procede del cálculo usual de predicados cuando se añade el predicado diádico de la identidad, «$x = y$», a las variables proposicionales y variables predicados. Esta ampliación está justificada por el hecho de ser el predicado de la identidad un predicado puramente lógico.

Para definir las expresiones de este cálculo necesitamos aumentar las reglas 1. a 5. del § 3 con la siguiente:

6. Se obtiene una expresión cuando se coloca una variable individual delante y detrás del signo «=». (Tales expresiones se llaman asimismo fórmulas primarias.)

La identidad está caracterizada por el hecho de que «$x = x$», por un lado, y «$x = y \rightarrow (F x \rightarrow F y)$», por otro, son fórmulas universalmente válidas. Con la introducción de la identidad es posible hacer indicaciones acerca del número de elementos del campo de individuos que se ha supuesto: así, la validez de la expresión «$\forall x \forall y (x = y)$» quiere decir que el campo de individuos contiene un solo elemento, pues esta fórmula sólo es verdadera en tal campo; además podemos expresar que el campo de individuos contiene como máximo dos, tres,... elementos: esto se logra mediante las fórmulas «$\forall x \exists y \exists z (x = y \vee x = z)$», «$\forall x \exists y \exists z \exists u (x = y \vee x = z \vee x = u)$», etc. También podemos hacer visible que el campo de individuos contiene como mínimo dos, tres,... elementos: con este objeto se emplean las fórmulas «$\exists x \exists y \neg (x = y)$», «$\exists x \exists y \exists z (\neg (x = y) \wedge \neg (x = z) \wedge \neg (y = z))$», «$\exists x \exists y \exists z \exists u (\neg (x = y) \wedge \neg (x = z) \wedge \neg (x = u) \wedge \neg (y = z) \wedge \neg (y = u) \wedge \wedge \neg (z = u))$», etc. Mediante conyunción de estas fórmulas podemos expresar también que el campo de individuos contiene exactamente dos, tres, ... elementos; con «$\forall x \exists y \exists z (x = y \vee x = z) \wedge \exists x \exists y \neg (x = y)$» se manifiesta, por ejemplo, que el campo de individuos contiene precisamente dos elementos: pues la primera conyunción es verdadera únicamente cuando existen a lo más dos elementos, y la segunda cuando existen por lo menos dos elementos; luego la conyunción total es verdadera solamente si existen exactamente dos elementos. De análoga manera se podrá expresar que existen exactamente tres elementos, etc.

El modo mencionado de hacer patente la numerosidad-n de un campo de individuos no es único: así, por ejemplo, la numerosidad-2 exacta de un campo de individuos puede también expresarse con la fórmula «$\forall x \exists y \exists z (\neg (y = z) \wedge (x = y \vee x = z))$». Somos ahora también capaces de representar la proposición que dice que una expresión determinada es válida-1, válida-2, etc., por medio de la validez universal de otra expresión. Tomemos para el caso la expresión «$\neg F x \vee F y$», de la cual mencionamos antes que es válida-1: la validez-1 de esta expresión quiere decir lo mismo que la validez universal de la expresión «$\forall z \forall u (z = u) \rightarrow \neg F x \vee F y$»; pues si el campo de individuos tiene más de un elemento, el primer miembro de la implicación será falso, y la expresión total será verdadera cualesquiera que sean los valores que que introduzcan en F, x e y; si existe exactamente un elemento, tanto el primer miembro como el segundo de la implicación (este último cualesquiera que sean los valores introducidos) serán verdaderos; por otro lado, si «$\forall z \forall u (z = u) \rightarrow \neg F x \vee F y$» es universalmente válida, también es válida-1; puesto que el primer miembro de la implicación es verdadero en un campo que contenga sólo un elemento, lo mismo debe ocurrir con el se-

gundo miembro independientemente de los valores que se introduzcan en él. Si, en general, $\mathfrak{Z}_n$ significa la fórmula que expresa que el campo de individuos contiene exactamente n elementos, la validez-n de una fórmula $\mathfrak{A}$ equivale a la validez universal de $\mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{A}$; si, además, $\mathfrak{M}_n$ y $\mathfrak{H}_n$ significan respectivamente las fórmulas que expresan que el campo de individuos contiene, por lo menos, n elementos, y, hasta n elementos a lo más, la validez universal de $\mathfrak{M}_n \rightarrow \mathfrak{A}$ quiere decir que $\mathfrak{A}$ es válida en todos los campos que contienen por lo menos n elementos, y la validez universal de $\mathfrak{H}_n \rightarrow \mathfrak{A}$ significa que $\mathfrak{A}$ es válida en todos los campos que contienen hasta un máximo de n elementos.

Obtenemos un *sistema axiomático* que nos proporciona las expresiones universalmente válidas del cálculo de predicados con inclusión de la identidad, mediante una sencilla generalización del sistema de axiomas para las expresiones universalmente válidas del cálculo de predicados sin inclusión de la identidad. Este último tenía las siguientes fórmulas elementales (cf. § 4): son fórmulas elementales todas las expresiones de la forma $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ en las que toda $\mathfrak{A}_i$ es una fórmula primaria, o una fórmula primaria negada, o una expresión de la forma $\exists x \mathfrak{B}$ (o $\exists y \mathfrak{B}$, etc.), y en la cual, además, se encuentran dos miembros disyuntivos $\mathfrak{A}_i$ y $\neg \mathfrak{A}_i$ (siendo $\mathfrak{A}_i$ una fórmula primaria).

Ampliamos ahora el campo de las *fórmulas elementales* admitidas del modo siguiente:

1. Son fórmulas elementales todas las expresiones de la forma $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$ en las que toda $\mathfrak{A}_i$ es una fórmula primaria, o una fórmula primaria negada, o una expresión de la forma $\exists x \mathfrak{B}$ (o $\exists y \mathfrak{B}$, etc.), y en la cual, además, se cumple por lo menos una de las condiciones siguientes: existe una i tal que se encuentran las fórmulas primarias $\mathfrak{A}_i$ y $\neg \mathfrak{A}_i$ como miembros disyuntivos; se encuentra un miembro disyuntivo «$x = x$» (o «$y = y$», etc.).

2. Son asimismo fórmulas elementales las expresiones que se pueden reducir a las fórmulas elementales del tipo 1. Entendemos por reducción de una expresión lo siguiente: si en la expresión aparece un miembro disyuntivo «$\neg (x = y)$», reducimos la expresión al suprimir este miembre disyuntivo y sustituir en todo el resto de la expresión la x por la y (análogamente ocurrirá si en vez de x e y se encuentran otras variables). Se llevará a cabo esta reducción cuantas veces sea necesario hasta que la expresión no contenga ningún miembro disyuntivo $\neg (\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$ —siendo $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ variables individuales.

Una fórmula elemental 2. es, por ejemplo, «$\neg (x = y) \vee \neg (z = u) \vee \vee F x z \vee \neg F y u$»; por reducción se obtiene en primer lugar «$\neg (z = u) \vee F y z \vee \neg F y u$», y luego «$F y u \vee \neg F y u$», que es una fórmula elemental del tipo 1.

En lo que se refiere a las *reglas de deducción,* se toman sin modificación las reglas (a) ... (d) del sistema del § 4. Damos un ejemplo sencillo de un proceso deductivo, a saber el de la expresión que arriba hemos indicado ser

universalmente válida, «$\forall z \forall u (z = u) \rightarrow \neg F x \vee F y$»; sin abreviaciones, esta expresión se escribe así: «$\neg \neg \exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \neg F x \vee \vee F y$».

Proceso deductivo.

$$\exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \exists u \neg (x = u) \vee \neg (x = y) \vee \neg F x \vee F y.$$

(Esta es una fórmula elemental del tipo 2., puesto que se escribe

$$«\exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \exists u \neg (y = u) \vee \neg F y \vee F y»$$

una vez reducida.)

$\exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \exists u \neg (x = u) \vee \neg F x \vee F y$ [según (d)]
$\exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \neg \neg \exists u \neg (x = u) \vee \neg F x \vee F y$ [según (a)]
$\exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee F x \vee F y$ [según (d)]
$\neg \neg \exists z (\neg \neg \exists u \neg (z = u)) \vee \neg F x \vee F y$ [según (a)].

Mostremos ahora que el sistema de axiomas está construido de tal modo que son deductibles todas las fórmulas universalmente válidas del cálculo de predicados con inclusión de la identidad, y solamente ellas. Por lo pronto es fácil de ver que únicamente pueden deducirse fórmulas universalmente válidas: la validez universal de las fórmulas elementales 1. es clara por sí misma; una fórmula elemental 2. tiene (descontando la sucesión de miembros disyuntivos) la forma $\neg (x = y) \vee \mathfrak{B}$; al sustituir x por y, $\mathfrak{B}$ pasa a $\mathfrak{B}'$, la cual podemos suponer universalmente válida; si se adopta ahora en un campo de individuos cualquiera una sustitución de todas las variables no ligadas por determinadas cosas apropiadas (predicados, proposiciones y objetos), entonces o bien x e y quedan sustituidas por objetos diferentes [con ello, la proposición que se obtiene es verdadera, puesto que «$\neg (x = y)$» será verdadera], o bien quedarán sustituidas por el mismo objeto (y en este caso la sustitución $\mathfrak{B}$ será la misma que la de $\mathfrak{B}'$, de modo que $\mathfrak{B}$ será verdadera, y con ella la expresión total); por tanto, la validez universal de $\mathfrak{B}'$ tiene siempre como consecuencia la de $\neg (x = y) \vee \mathfrak{B}$, y al ser universalmente válidas las fórmulas elementales 1. lo son también las fórmulas elementales 2. Habíamos hecho patente ya en el § 4, en lo que se refiere a las reglas (a) . . . . . (d), que, independientemente de los valores introducidos, la fórmula inferior es una consecuencia de la superior —o en su caso de las dos fórmulas superiores—, de modo que las reglas (a) . . . (d) llevan de fórmulas universalmente válidas a otras fórmulas asimismo universalmente válidas.

Más difícil es poner de manifiesto la *completitud* del sistema de axiomas, es decir, mostrar que proporciona *todas* las fórmulas universalmente válidas. Demostramos en primer lugar el siguiente teorema:

TEOREMA XXV. Para toda expresión $\mathfrak{A}$ del cálculo de predicados con inclusión de la identidad puede darse una expresión $\mathfrak{B}$ que no contenga la identidad y tal que $\mathfrak{A}$ sea universalmente válida siempre que $\mathfrak{B}$ lo sea, y sólo en este caso.

Designaremos con $F_1, \ldots, F_r$ las variables predicado que aparezcan en la expresión $\mathfrak{A}$; sea H una variable predicado diádica que no se encuentre en la expresión, y además sean $z_0, z_1, z_2, \ldots$ variables individuales que no aparezcan en forma libre en $\mathfrak{A}$. Definimos ahora para cada F_i una expresión $\mathfrak{S}(F_i, H)$: siendo F_i una variable predicado p-ádica, $\mathfrak{S}(F_i, H)$ significa la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\exists z_0 \exists z_1 \ldots \exists z_p [(&Hz_0z_1 \wedge F_i z_0 z_2 \ldots z_p \wedge \neg F_i z_1 z_2 \ldots z_p) \vee \\ &\vee (H z_0 z_2 \wedge F_i z_1 z_0 z_3 \ldots z_p \wedge \neg F_i z_1 z_2 z_3 \ldots z_p) \vee \ldots \\ &\vee (H z_0 z_p \wedge F_i z_1 z_2 \ldots z_{p-1} z_0 \wedge \neg F_i z_1 z_2 \ldots z_{p-1} z_p)].\end{aligned}$$

Esta expresión, $\mathfrak{S}(F_i, H)$, posee la siguiente propiedad: si en ella se sustituye H por el predicado diádico de la identidad, la expresión se hace falsa en cualesquiera campos de individuos con cualquier sustitución que se lleve a cabo de las variables predicado F_i por predicados determinados: pues téngase en cuenta que $\neg (z_0 = z_1) \vee \neg F_i z_0 z_2 \ldots z_p \vee F_i z_1 z_2 \ldots z_p$ es una fórmula universalmente válida, y por ello $z_0 = z_1 \wedge F_i z_0 z_2 \ldots z_p \wedge \neg F_i z_1 z_2 \ldots z_p$ se hará falsa con cualquier sustitución en cualquier campo; lo mismo ocurrirá con $z_0 = z_2 \wedge F_i z_1 z_0 z_3 \ldots z_p \wedge \neg F_i z_1 z_2 \ldots z_p, \ldots, z_0 = z_p \wedge F_i z_1 \ldots z_{p-1} z_0 \wedge \wedge \neg F_i z_1 \ldots z_p$.

Cuando se sustituye en $\mathfrak{A}$ el predicado «$=$» por H, es decir, se escribe en lugar de cada fórmula primaria $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{A}$ (en donde $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son variables individuales), $H\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$ pasa a ser una expresión que llamaremos $\mathfrak{A}'$. Demos ahora la expresión

$$\begin{aligned}\exists z_0 \neg H z_0 z_0 \vee \exists z_0 \exists z_1 \exists z_2 (H z_0 z_1 \wedge H z_2 z_1 \wedge \neg H z_0 z_2) \vee \\ \vee \mathfrak{S}(F_1, H) \vee \ldots \vee \mathfrak{S}(F_r, H) \vee \mathfrak{A}'\end{aligned}$$

a la que llamaremos $\mathfrak{B}$ en este teorema XXV.

Si $\mathfrak{B}$ es universalmente válida, también ha de serlo la expresión que se obtiene a partir de $\mathfrak{B}$ cuando H se sustituye en todas partes por «$=$»; ahora bien, $\exists z_0 \neg (z_0 = z_0)$ y $\exists z_0 \exists z_1 \exists z_2 (z_0 = z_1 \wedge z_2 = z_1 \wedge \neg (z_0 = z_2))$ son fórmulas falsas en cualquier campo; además, las fórmulas $\mathfrak{S}(F_i, =)$ son falsas en todos los campos cuando se sustituyen las F_i por cualesquiera predicados determinados. Entonces, como $\mathfrak{A}'$ pasa a $\mathfrak{A}$ al sustituir H por «$=$», se sigue que la validez universal de $\mathfrak{B}$ tiene como consecuencia la de $\mathfrak{A}$.

Sea ahora $\mathfrak{B}$ no válida universalmente. Vamos a escribir $\mathfrak{A}$ de una forma más exacta con $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, =, x_1, \ldots, x_k, A_1, \ldots, A_l)$, en donde $x_1, \ldots, x_k$ serán las variables individuales que aparezcan y $A_1, \ldots, A_l$ las variables pro-

posicionales; $\mathfrak{A}'$ tendría entonces la forma $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, H, x_1, \ldots, x_k, A_1, \ldots, A_l)$. Como $\mathfrak{B}$ no es universalmente válida, en cierto campo de individuos J, existen un predicado diádico Φ, los predicados $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$, los objetos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y las proposiciones $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$, tales que al sustituir H por Φ, $F_1, \ldots, F_r$ por $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$, $x_1, \ldots, x_k$ por $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y $A_1, \ldots, A_l$ por $\Theta_1, \ldots, \Theta_l$, $\mathfrak{B}$ será falsa; puesto que $\mathfrak{B}$ es una disyunción, esto quiere decir que las proposiciones siguientes, $\exists z_0 \neg \Phi z_0 z_0, \exists z_0 \exists z_1 \exists z_2 (\Phi z_0 z_1 \wedge \Phi z_2 z_1 \wedge \wedge \neg \Phi z_0 z_2)$, $\mathfrak{I}(\Psi_1, \Phi), \ldots, \mathfrak{I}(\Psi_r, \Phi), \mathfrak{A}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ serán todas falsas.

Dado que $\exists x \neg \Phi x x$ es falsa, $\forall x \Phi x x$ será verdadera, es decir, Φ es reflexiva; debido a ser falsa $\exists x \exists y \exists z (\Phi x y \wedge \Phi z y \wedge \neg \Phi x z)$, ha de ser falsa $\exists x \exists z (\Phi x x \wedge \Phi z x \wedge \neg \Phi x z)$: es decir, debido a la reflexividad de Φ, $\exists x \exists z (\Phi z x \wedge \neg \Phi x z)$ es falsa, o sea $\forall x \forall z (\Phi x z \rightarrow \Phi z x)$ es verdadera, lo cual quiere decir que Φ es simétrica; puesto que, además, $\exists x \exists y \exists z (\Phi x y \wedge \Phi z y \wedge \neg \Phi x z)$ es falsa, por la simetría de Φ también lo es $\exists x \exists y \exists z (\Phi x y \wedge \Phi y z \wedge \neg \Phi x z)$, y $\forall x \forall y \forall z (\Phi x y \wedge \Phi y z \rightarrow \rightarrow \Phi x z)$ será verdadera, lo cual quiere decir que Φ es transitiva.

Dividimos ahora los objetos de J en clases mutuamente excluyentes. Dos objetos α y β de J pertenecen a la misma clase siempre que ocurra $\Phi \alpha \beta$, y sólo en este caso; debido a la reflexividad, simetría y transitividad de Φ, esta división en clases es unívoca. Si Ψ_i es un predicado p-ádico y $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ son objetos cualesquiera de J, $\Psi_i \beta_1 \ldots \beta_p$ y $\Psi_i \gamma_1 \ldots \gamma_p$ tienen el mismo valor veritativo cuando las parejas β_1 y $\gamma_1, \ldots, \beta_p$ y γ_p están compuestas por dos elementos que pertenecen a la misma clase: lo cual se sigue de ser falsa $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$ [17].

---

[17] Téngase en cuenta en primer lugar que $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$ es falsa para cualquier sustitución de $z_0, z_1, \ldots z_p$ dentro del campo J. Adviértase además que el miembro disyuntivo de lugar k en la matriz de $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$ tiene la forma $\Phi z_0 z_k \wedge \Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p (z_k, z_0) \wedge \neg \Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p$ (en que designamos por $\Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p (z_k, z_0)$ el predicado Ψ_i en que en el lugar de la variable z_k se encuentra la z_0); y que al desarrollar $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$, dicho miembro dará lugar a un conjunto de submiembros disyuntivos de la forma $\Phi \alpha_0 \alpha_k \wedge \Psi_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p (\alpha_k, \alpha_0) \wedge \neg \Psi_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ (en que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_p$ es una de las posibles sustituciones de $z_0, z_1, z_2 \ldots z_p$ en el campo J): de modo que todas las distintas $\Psi_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p (\alpha_k, \alpha_0)$ que se encuentran en tal conjunto coinciden (en otro orden) con las $\Psi_i \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$. Finalmente, obsérvese que $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$ es, en consecuencia, una disyunción de submiembros disyuntivos como los mencionados (agrupables en conjuntos según el valor de k).

Tenemos ahora las siguientes posibilidades:

1. Que cualquiera que sea la sustitución de las variables $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_p$, $\Psi_i z_1 z_2 \ldots \ldots z_p$ tenga el mismo valor veritativo que $\Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p (z_k, z_0)$, y ello cualquiera que sea k. Aplicando reiteradamente esta propiedad, *a fortiori* se cumplirá la aserción hecha en el texto acerca de $\Psi_i \beta_1 \ldots \beta_p$ y $\Psi_i \gamma_1 \ldots \gamma_p$.

2. Que no ocurra lo anterior. Como hemos dicho que las sustituciones de $\Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p (z_k, z_0)$ y $\Psi_i z_1 z_2 \ldots z_p$ tienen la misma extensión, al menos habrá una de estas últimas, p. ej., $\Psi_i \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, que será falsa. Por otra parte, a partir de

Tomamos ahora un nuevo campo de individuos J', cuyos elementos son las clases formadas con los elementos de J. Dos elementos δ_1 y δ_2 de J' son idénticos siempre que ocurra $\Phi\,\beta_1\,\beta_2$ (en que β_1 será un elemento de δ_1 y β_2 un elemento de δ_2), y únicamente en este caso. Definimos en J' los predicados $\Psi'_1, \ldots, \Psi'_r$, que tendrán respectivamente los mismos lugares vacíos que $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$; la definición se lleva a cabo de este modo: si Ψ'_i es p-ádico y $\delta_1, \ldots, \delta_p$ son elementos cualesquiera de J', $\Psi'_i\,\delta_1 \ldots \delta_p$ es verdadera siempre y únicamente cuando $\Psi_i\,\beta_1 \ldots \beta_p$ lo es (siendo β_1 un elemento de $\delta_1, \ldots, \beta_p$ un elemento de δ_p).

Afirmamos ahora que $\mathfrak{A}(\Psi'_1, \ldots, \Psi'_r, =, \zeta_1, \ldots, \zeta_k, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ es falsa (en ella, $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ son las clases a las que pertenecen los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de J que hemos mencionado más arriba). Para demostrarla, vamos a formular esta aserción con mayor generalidad; cualquier expresión parcial de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, =, x_1, \ldots, x_k, A_1, \ldots, A_l)$ tiene la forma $\mathfrak{C}(F_1, \ldots, F_r, =, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, A_1, \ldots, A_l)$, ya que puede contener otras variables libres, mientras que no es necesario que aparezcan en ella todas las demás variables (pero $\mathfrak{A}$ debe incluirse entre las expresiones parciales de $\mathfrak{A}$); nuestra aserción generalizada dice ahora: si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s$ son objetos de J, y $\delta_1, \ldots, \delta_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ son elementos de J' (de suerte que α_i sea un elemento de δ_i y β_j sea un elemento de ε_j), las dos expresiones $\mathfrak{C}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ y $\mathfrak{C}(\Psi'_1, \ldots, \Psi'_r, =, \delta_1, \ldots, \delta_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ tendrán el mismo valor veritativo. (Por razones de brevedad designaremos con $\mathfrak{D}$ la primera expresión, y con $\mathfrak{E}$ la segunda.)

Vamos a demostrarla por inducción según el número total de signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que aparezcan en $\mathfrak{C}$.

1. Sea 0 tal número. O bien $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tienen ambas la forma Θ_i, o bien $\mathfrak{D}$ consiste en Ψ_i con objetos concretos de J a continuación y $\mathfrak{E}$ consiste en Ψ'_i con las correspondientes clases —miembros de J'— a continuación, o bien $\mathfrak{D}$ tiene la forma $\Phi\,\gamma_1\,\gamma_2$ y $\mathfrak{E}$ la forma $\delta_1 = \delta_2$ (en que γ_1 es un elemento de

---

cada miembro disyuntivo de la matriz de $\mathfrak{I}(\Psi_i, \Phi)$ se obtendrá un submiembro disyuntivo cuyo tercer miembro conyuntivo será precisamente $\neg\,\Psi_i\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p$; elegimos entre todos estos miembros conyuntivos idénticos (cada uno de los cuales tiene el valor «$\vee$») el que se encuentra en un submiembro disyuntivo $\Phi\,\alpha_0\,\alpha_k \wedge \wedge \Psi\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p\,(\alpha_k, \alpha_0) \wedge \neg\,\Psi_i\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p$ tal que sus dos últimos miembros conyuntivos tienen el mismo valor veritativo (k queda determinado, posiblemente de modo múltiple, por esta condición); tendremos ahora, pues, $\Phi\,\alpha_0\,\alpha_k \wedge \vee \wedge \vee$. Si α_0 y α_k perteneciesen a la misma clase de objetos de J, $\Phi\,\alpha_0\,\alpha_k$ tendría el valor «$\vee$», y todo el submiembro disyuntivo tendría el mismo valor veritativo «$\vee$»: con lo cual $\mathfrak{I}(\Psi_i\,\Phi)$ sería verdadera, contra la hipótesis.

Por consiguiente, si α_0 y α_k pertenecen a la misma clase de J, $\Psi_i\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \ldots \alpha_p\,(\alpha_k, \alpha_0)$ y $\Psi_i\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p$ han de tener el mismo valor veritativo; y reiterando esta propiedad se llega a la aserción que queríamos demostrar. *(N. del T.)*

δ_1 y γ_2 un elemento de δ_2). En cualquiera de estos casos, y teniendo en cuenta lo ya expuesto, se sigue que $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tienen el mismo valor veritativo.

2. Sea n ($n \neq 0$) tal número. Supongamos que se ha mostrado ya que la aserción es verdadera para valores más pequeños del número que nos ocupa. Si $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tienen respectivamente las formas $\neg \mathfrak{D}_1$ y $\neg \mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tendrán el mismo valor veritativo, ya que por hipótesis $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{E}_1$ tienen el mismo valor veritativo; si $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ tienen respectivamente las formas $\mathfrak{D}_1 \vee \mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{E}_2$, han de tener $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{E}$ el mismo valor veritativo, puesto que $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{E}_1$, por una parte, y $\mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{E}_2$, por otra, tienen por hipótesis el mismo valor veritativo. Finalmente, puede ocurrir que $\mathfrak{D}$ tenga la forma $\exists x\, \mathfrak{D}_1(x)$ y $\mathfrak{E}$ la forma $\exists x\, \mathfrak{D}_2(x)$: en este caso, si $\exists x\, \mathfrak{D}_1(x)$ es verdadera existe un elemento β de J tal que $\mathfrak{D}_1(\beta)$ es verdadera, y si δ es la clase a que pertenece β, por hipótesis $\mathfrak{D}_2(\delta)$ es verdadera, o sea que también $\exists x\, \mathfrak{D}_2(x)$ será verdadera; si, por el contrario, $\exists x\, \mathfrak{D}_1(x)$ es falsa, $\mathfrak{D}_1(\beta)$ será falsa (en que β significa un elemento cualquiera de J), por hipótesis $\mathfrak{D}_2(\delta)$ será falsa (siendo δ un elemento cualquiera de J') y por ello $\exists x\, \mathfrak{D}_2(x)$ también será falsa.

Como aplicación a un caso particular de la aserción demostrada, se sigue que $\mathfrak{A}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \Phi, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ y $\mathfrak{A}(\Psi'_1, \ldots, \Psi'_r, =, \zeta_1, \ldots, \zeta_k, \Theta_1, \ldots, \Theta_l)$ tienen el mismo valor veritativo, y puesto que la primera proposición es falsa, también lo es la segunda; con esto hemos concluido que $\mathfrak{B}$ no es universalmente válida, ya que tampoco $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, =, x_1, \ldots, x_k, A_1, \ldots, A_l)$ tiene validez universal, y hemos demostrado así el teorema XXV.

Queremos mostrar ahora que toda fórmula universalmente válida es también deductible. Sea universalmente válida la expresión $\mathfrak{A}$; de acuerdo con el teorema XXV, la expresión

$$\exists z_0 \neg H z_0 z_0 \vee \exists z_0 z_1 z_2 (H z_0 z_1 \wedge H z_2 z_1 \wedge \neg H z_0 z_2) \vee \vee \mathfrak{F}(F_1, H) \vee \ldots \vee \mathfrak{F}(F_r, H) \vee \mathfrak{A}'$$

será también universalmente válida; como no contiene la identidad, es deductible en el sistema de axiomas del § 4, y, naturalmente, también en el sistema de que tratamos ahora, que es más amplio que aquél. Si sustituimos ahora en todo el proceso deductivo H por «$=$», se obtiene asimismo, sin duda, un proceso deductivo; por tanto, también

$$\exists z_0 \neg (z_0 = z_0) \vee \exists z_0 z_1 z_2 (z_0 = z_1 \wedge z_2 = z_1 \wedge \neg (z_0 = z_2)) \vee \vee \mathfrak{F}(F_1, =) \vee \ldots \vee \mathfrak{F}(F_r, =) \vee \mathfrak{A} \;\star$$

es deductible. Además, $\neg \exists_0 \neg (z_0 = z_0)$, $\neg \exists_0 z_1 z_2 (z_0 = z_1 \wedge z_2 = z_1 \wedge \neg (z_0 = z_2))$, $\neg \mathfrak{F}(F_1, =), \ldots, \neg \mathfrak{F}(F_r, =)$ son deductibles [los procesos deductivos de estas fórmulas son fáciles de hallar, ya que en ellos se utilizan únicamente las reglas (a) ... (c), con lo cual se asciende de modo unívoco a las fórmulas

superiores]. A partir de estas fórmulas se llega, por aplicación exclusiva y reiterada de (b), a

$$\neg [\exists z_0 \neg (z_0 = z_0) \vee \exists z_0 z_1 z_2 (z_0 = z_1 \wedge z_2 = z_1 \wedge \neg (z_0 = z_2)) \vee \\ \vee \mathfrak{S} (F_1, =) \vee \ldots \vee \mathfrak{S} (F_r, =)] \text{ **}.$$

Ahora bien, todos los teoremas obtenidos en el § 5 para el sistema de axiomas del § 4 continúan siendo válidos en el sistema axiomático actual: no daremos una prueba detallada de esta afirmación, pero el lector puede convencerse por sí mismo de que el orden de sucesión de las demostraciones permanece inalterado en el sistema de que tratamos ahora. Lo que nos interesa aquí es que la regla de separación de fórmulas deductibles conduce también ahora a fórmulas deductibles; aplicando esto a las fórmulas * y ** se sigue que $\mathfrak{A}$ es deductible.

Con ello hemos demostrado la completitud del sistema de axiomas.

§ 10. Axiomática de teorías científicas; el cálculo múltiple de predicados; sistemas axiomáticos de primero y de segundo grado

Vamos a indicar ahora cómo se lleva a cabo con nuestro cálculo el *tratamiento axiomático de teorías científicas* (no de naturaleza lógica). Tanto en la matemática como en otras disciplinas en las que se elige una fundamentación axiomática se extraen en la mayoría de los casos las consecuencias de los axiomas sin utilizar la lógica formalizada. No nos contentaremos aquí con tal punto de vista, ya que justamente nos ocupamos de precisar los procesos lógicos de deducción.

En los axiomas de una teoría científica aparecen ciertos predicados cuyo entrelazamiento mutuo se conoce; en ciertos casos aparecen también determinados objetos. Para poder hacer la representación en nuestro cálculo, hemos de indicar primeramente el concepto de fórmula que se ha de emplear (utilizamos aquí el término neutral «fórmula», ya que habíamos reservado el concepto «expresión» para las fórmulas que se forman con variables proposicionales, variables individuales y variables predicado). En cada caso se supone cierto campo de individuos al cual se refieren las variables individuales, y al que pertenecen los objetos determinados que pudieran aparecer. Las únicas variables que se utilizarán son las individuales: las proposicionales y predicado no han de aparecer. El *concepto de fórmula* es como sigue:

Se obtiene una fórmula primaria cuando se llenan con variables individuales, o con signos de objetos determinados, los lugares vacíos de un predicado (las variables individuales aparecen en las fórmulas primarias en forma libre). Entre los predicados aparece frecuentemente la identidad. Se prosigue

la construcción de fórmulas con ayuda de las reglas 3. a 5. del § 3, en las cuales se ha de sustituir la palabra «expresión» por «fórmula».

Tan pronto como las fórmulas no contienen ninguna variable individual libre representan verdaderas proposiciones, no meras formas proposicionales.

Como *fórmulas elementales* para las deducciones tenemos en primer lugar los axiomas formalizados de la teoría científica, que llamaremos aquí axiomas (suponemos que existe un número finito de ellos y que pueden transcribirse en fórmulas —con el sentido indicado de éstas). En segundo término vienen otras de naturaleza puramente lógica: son fórmulas elementales análogas a las que teníamos ya, unas en el § 4 y otras en el § 9; únicamente es menester observar que ahora tenemos otras fórmulas primarias. En lo que se refiere a *reglas de deducción,* nos encontramos por lo pronto con las reglas (a) ... (d) del § 4 [en la regla (d) es necesario tener en cuenta que en el lugar ocupado por la variable y de la fórmula superior puede encontrarse un signo que represente un objeto determinado]. Aparece aquí una regla de deducción más, la *regla de separación:* si $\mathfrak{A}$ y $\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ son deductibles, también $\mathfrak{B}$ será deductible.

En el capítulo I, § 9, hemos indicado ya —con ocasión de los razonamientos correspondientes del cálculo de proposiciones— que la regla de separación (que en el cálculo de predicados de los §§ 4 y 9 proporcionaba ciertamente resultados verdaderos, pero no era imprescindible), es ahora necesaria: sin ella, por ejemplo, careceríamos de la posibilidad general de extraer $\exists\, x\, \Psi\, x$ de los dos axiomas $\exists\, x\, \Phi\, x$ y $\neg \exists\, x\, \Phi\, x \vee \exists\, x\, \Psi\, x$, ya que las reglas (a) ... (d) no bastan para ello.

El sistema de las reglas de deducción es suficiente para llegar a todas las consecuencias de los axiomas. Podemos suponer además que los axiomas están escritos sin variables individuales libres, ya que siempre es posible anteponer el número que sea necesario de signos universales; por otra parte, siempre cabe pasar —por medio de nuestras reglas de deducción— de la formulación con variables individuales libres a la que contiene el número apropiado de signos universales, y a la inversa: la transformación en el primer sentido se realiza con ayuda de la regla (c); en la transformación en sentido opuesto hemos de advertir que para cada fórmula $\mathfrak{A}(x)$ con la variable libre x, la fórmula $\forall\, x\, \mathfrak{A}(x) \rightarrow \forall\, y\, \mathfrak{A}(y)$, y además la $\forall\, y\, \mathfrak{A}(y) \rightarrow \mathfrak{A}(x)$, son deductibles partiendo únicamente de las fórmulas elementales lógicas y aplicando las reglas (a) a (d): de modo que en caso de poderse deducir $\forall\, x\, \mathfrak{A}(x)$, basta aplicar dos veces la regla de separación para obtener asimismo $\mathfrak{A}(x)$. Para los argumentos que siguen es esencial, sin embargo, que se escriban los axiomas sin variables individuales libres.

Sean $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ los predicados que aparecen en los axiomas (sin contar entre aquéllos la identidad); sean además $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ los objetos determinados que se encuentran en ellos. Vamos a transcribir con $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

la fórmula obtenida por conyunción de todos los axiomas. Sea ahora $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_l)$ una fórmula que contenga —al menos en parte— asimismo $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ y posiblemente las variables individuales libres $x_1, \ldots, x_l$; ahora bien, es posible expresar que $\mathfrak{B}$ es una consecuencia de $\mathfrak{A}$ escribiendo $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \rightarrow \rightarrow \mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_k)$; pero debido al punto de vista axiomático, en las deducciones solamente puede aceptarse, acerca de los predicados $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ y los objetos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, aquello que se encuentra explícitamente formulado en los axiomas: por tanto, $\mathfrak{B}$ es una consecuencia de $\mathfrak{A}$ únicamente si aquella relación es válida para cualesquiera predicados $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ y objetos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Pero esto quiere decir: $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_l)$ *es una consecuencia de* $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *siempre y únicamente cuando* $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_m) \rightarrow \mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_l)$ *es una fórmula universalmente válida* (aquí, $F_1, \ldots, F_n$ son variables predicado cuyos números de lugares vacíos corresponden a los de $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$).

Si la última fórmula es universalmente válida, podrá deducirse en los sistemas axiomáticos de los §§ 4 y 9; pero en este caso, también será deductible en el presente sistema la fórmula

$$\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \rightarrow \mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_l)$$

ya que necesitamos solamente sustituir $F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_m$ en todas partes por $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ en el proceso deductivo para obtener el proceso correspondiente a nuestro sistema: no es menester, en absoluto, utilizar para ello los axiomas como fórmulas elementales, ni la regla de separación. Además, es deductible ahora $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, o sea la conyunción de los axiomas, lo cual se logra únicamente con las reglas (a) y (b): pues si, por ejemplo, son $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ dos axiomas, según (a) se tienen $\neg\neg\mathfrak{B}$ y $\neg\neg\mathfrak{C}$, y además, por (b), $\neg(\neg\mathfrak{B} \vee \neg\mathfrak{C})$, o sea $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$; análogamente ocurre cuando se parte de un número mayor de axiomas. Ahora bien, puesto que

$\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y

$\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \rightarrow \mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_l)$

son deductibles, también lo es, con ayuda de la regla de separación, $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_1, \ldots, x_l)$.

Por tanto, en nuestro sistema todas las consecuencias de los axiomas son verdaderamente deductibles.

Dado que, por un lado todos los axiomas son consecuencias de la conyunción de los axiomas, y además las restantes fórmulas elementales se obtienen por reemplazamiento en expresiones universalmente válidas del cálculo de predicados, no son deductibles demasiadas fórmulas. También hemos con-

siderado ya varias veces la validez de las reglas (a) ... (d); análogamente, la regla de separación puede proporcionar únicamente resultados válidos.

La *compatibilidad* de un sistema de axiomas puede retrotraerse al problema de la validez universal de una expresión. Con la simbología utilizada, diremos que el sistema de axiomas es compatible si «$\neg\, \mathfrak{A}\,(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_n)$» no es una fórmula universalmente válida, o en otras palabras, si «$\mathfrak{A}\,(F_1, \ldots, F_n, y_1, \ldots, y_n)$» es cumplible.

Demos un *ejemplo* sencillo de un proceso deductivo. Para la *suma de cantidades* pueden establecerse los dos axiomas siguientes:

1. Dos cantidades se pueden sumar.

2. En la suma de cantidades se cumple la ley asociativa (es decir, es indiferente para el resultado que se obtiene con tres cantidades el que primero se sumen x e y, y al resultado se sume z, o que primeramente se sumen y y z y al resultado se sume x).

El campo de individuos está formado aquí por las «cantidades», a las cuales se refieren, por tanto, las variables individuales $x, y, z, \ldots$ En los axiomas aparece solamente un predicado triádico, Φ: «$\Phi\, x\, y\, z$» significa «z es un resultado de la suma de x e y». La formulación simbólica de los axiomas rezará del modo siguiente:

1. $\forall\, x\, y\, \exists\, z\, \Phi\, x\, y\, z$.
2. $\forall\, x\, y\, z\, u\, v\, w\, (\Phi\, x\, y\, u \wedge \Phi\, u\, z\, w \wedge \Phi\, y\, z\, v \rightarrow \Phi\, x\, v\, w)$.

Hemos de deducir de aquí la transitividad de la relación de desigualdad entre cantidades. Con este objeto adoptamos «$x < y$» como forma abreviada de escribir $\exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y$; el teorema en cuestión se expresará mediante la fórmula «$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$»; sin la abreviación «$<$», tal fórmula será «$\exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y \wedge \exists\, u\, \Phi\, y\, u\, z \rightarrow \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$», y si no se emplean las abreviaciones «$\wedge$» y «$\rightarrow$», «$\neg\, \neg\, (\neg\, \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y \vee \neg\, \exists\, u\, \Phi\, y\, u\, z) \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$». Observemos por lo pronto que también ahora son válidos los siguientes teoremas: si $\mathfrak{A}$ es deductible, también lo será $\mathfrak{A}'$ (en que $\mathfrak{A}'$ procede de $\mathfrak{A}$ por cambio de denominación de las variables ligadas); si una disyunción es deductible, asimismo lo es cualquier fórmula obtenida por permutación de sus miembros disyuntivos; si $\mathfrak{A}$ es deductible, lo es también $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (en que $\mathfrak{B}$ es arbitraria).

$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ (en que $\mathfrak{A}'$ procede de $\mathfrak{A}$ por cambio de denominación o por permutación de los miembros disyuntivos) y $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ son deductibles sin necesidad de utilizar los axiomas, sino a partir de las fórmulas elementales puramente lógicas, de modo que con ayuda de la regla de separación se obtienen respectivamente $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. Si además una fórmula $\forall\, x_1 \ldots x_n\, \mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$ es deductible, también lo será $\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$, como ya dijimos antes. Por otra parte, siguen siendo válidos todos los teoremas

del § 5 (mientras sean aplicables aquí), como puede mostrarse del modo correspondiente aplicando la regla de separación.

El proceso deductivo se presenta del modo siguiente:
A partir de $\forall x\, y\, z\, u\, v\, w\, (\Phi\, x\, y\, u \wedge \Phi\, u\, z\, w \wedge \Phi\, y\, z\, v \rightarrow \Phi\, x\, v\, w)$
mediante cambio de denominación de las variables ligadas se obtiene

$$\forall x\, w\, v\, y\, a\, z\, (\Phi\, x\, w\, y \wedge \Phi\, y\, v\, z \wedge \Phi\, w\, v\, a \rightarrow \Phi\, x\, a\, z),$$

y eliminando los signos universales

$$\Phi\, x\, w\, y \wedge \Phi\, y\, v\, z \wedge \Phi\, w\, v\, a \rightarrow \Phi\, x\, a\, z.$$

Puesto que

$$(\Phi x w y \wedge \Phi y v z \wedge \Phi w v a \rightarrow \Phi x a z) \rightarrow \neg\, \Phi x w y \vee \neg\, \Phi y v z \vee \neg\, \Phi w v a \vee \Phi x a z$$

es deductible partiendo únicamente de fórmulas elementales lógicas, por medio de la regla de separación se obtiene $\neg\, \Phi\, x\, w\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \vee \neg\, \Phi\, w\, v\, a \vee \Phi\, x\, a\, z$; por tanto, la fórmula $\neg\, \Phi\, x\, w\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \vee \neg\, \Phi\, w\, v\, a \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z \vee \Phi\, x\, a\, z$, que se halla introduciendo un miembro disyuntivo, es asimismo deductible; de ella, según la regla (d), se llega a $\neg\, \Phi\, x\, w\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \neg\, \Phi\, w\, v\, a \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$; además, aplicando la regla (c) se obtiene

$$\neg\, \Phi\, x\, w\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \neg\, \exists\, a\, \Phi\, w\, v\, a \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z,$$

pero $\exists\, a\, \Phi\, w\, v\, a$ puede demostrarse a partir del primer axioma, por cambio de denominación de las variables ligadas y supresión del signo universal. Con la fórmula anterior se obtiene, teniendo en cuenta la regla de separación (obsérvese que los miembros disyuntivos pueden permutarse), esta otra: $\neg\, \Phi\, x\, w\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$. Aplicando (c) dos veces se hallan $\neg\, \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y \vee \neg\, \Phi\, y\, v\, z \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$ y $\neg\, \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y \vee \neg\, \exists\, u\, \Phi\, y\, u\, z \vee \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$, y con ayuda de la regla (a) se obtiene $\neg\, \neg\, (\neg\, \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, y \vee \vee \neg\, \exists\, u\, \Phi\, y\, u\, z) \vee \exists\, u\, \Phi\, x\, u\, z$, es decir, nuestra tesis.

En un *segundo ejemplo* nos interesa menos el modo de efectuar el proceso deductivo, que ya ha sido descrito suficientemente, que un problema que se encuentra en conexión con la formulación de los axiomas: vamos a tomar esta vez ciertos axiomas geométricos de los «Fundamentos de la Geometría» de HILBERT, y precisamente los llamados axiomas de enlace.

Se trata ahora de tres diferentes sistemas de cosas, a saber, de puntos, rectas y planos. Entre puntos y rectas y entre puntos y planos existe una relación que se designa con «estar en» o «pertenecer a». Vamos a modificar aquí el texto de la formulación hilbertiana de modo que utilicemos siempre «estar en», con lo que aquélla resultará más clara. Los axiomas dicen así:

I 1. Dados dos puntos A y B, existe una recta a, tal que cada uno de los dos puntos A y B está en tal recta.

I 2. Dados dos puntos A y B, no existe más que una recta tal que cada uno de estos dos puntos esté en tal recta.

(Se ha de entender, siempre que se habla de dos o tres puntos, rectas o o planos, que son dos o tres puntos, rectas o planos diferentes.)

I 3. En una recta existen por lo menos dos puntos. Existen por lo menos tres puntos que no están en una recta.

I 4. Dados tres puntos cualesquiera A, B y C, que no están en una y la misma recta, existe un plano α, tal que cada uno de los tres puntos A, B y C está en tal plano. Para cada plano existe un punto que está en él.

I 5. Dados tres puntos cualesquiera A, B y C, que no están en una y la misma recta, no existe más que un plano tal que cada uno de los tres puntos A, B y C esté en él.

I 6. Si dos puntos A y B de una recta a están en un plano α, entonces todo punto de a está en el plano α.

I 7. Si, dados dos planos α y β, existe un punto A que está en ambos, existe además otro punto B que está en α y en β.

I 8. Existen por lo menos cuatro puntos que no están en un plano.

Hemos de tener en cuenta para la formulación simbólica que aquí se habla de tres campos de individuos, a saber, los de los puntos, rectas y planos. Ahora bien, podemos reunir los tres campos de individuos en uno solo e introducir los tres predicados «Πx» (x es un punto), «Γx» (x es una recta) y «Δx» (x es un plano), con cuya ayuda expresaremos a qué tipo de campo de individuos se refiere cada aserción. La relación fundamental de este sistema de axiomas era «estar en», y la transcribiremos por «$\Lambda x y$» (x está en y); por tanto, «x está en y» tiene por ahora sentido —y en los axiomas no se utiliza de otro modo— únicamente cuando en x se introduce un punto, y en y una recta o un plano. Pero si formamos las fórmulas primarias del modo empleado antes, en ellas aparecerá también, p. ej., «$\Lambda x x$», y, en general, $\Lambda x y$ se usará con toda generalidad; tenemos un ejemplo en la fórmula elemental lógica «$\neg \Pi x \vee \neg \Pi y \vee \Lambda x y \vee \neg \Lambda x y$», que podemos escribir también en la forma «$\Pi x \rightarrow (\Pi y \rightarrow \Lambda x y \vee \neg \Lambda x y)$», y cuyo significado es el siguiente: «si x es un punto e y es un punto, x está en y o x no está en y»; deberíamos poder tolerar estas fórmulas adicionales, y puede advertirse que la justificación de su uso residirá en generalizar «$\Lambda x y$» de alguna forma que permita conservar sentido para «$\Lambda x y$» cuando se efectúe un reemplazamiento cualquiera de x e y, sin que, a la vez, resulten lesionados los axiomas. Pero no interesa el modo concreto de la generalización, que podría llevarse a cabo de muchas maneras (por ejemplo, estipulando que «$\Lambda x y$» tuviera el valor «falso» siempre que x no se reemplazara

por un punto o y por un recta o un plano), como tampoco nos interesan las fórmulas ahora deductibles que se apoyan en el supuesto de haberse realizado una de estas generalizaciones, que dejamos indeterminada.

Demos ahora la formulación simbólica de los axiomas. Podemos escribirlos con todos los signos universales colocados al comienzo, o bien —tal como haremos para simplificar la escritura— con variables individuales libres [«$x \neq y$» será un modo abreviado de representar «$\neg (x = y)$»]. (En algunos casos hemos suprimido de los axiomas hipótesis innecesarias.)

I 1. $\Pi x \wedge \Pi y \rightarrow \exists z (\Gamma z \wedge \Lambda x z \wedge \Lambda y z)$.

I 2. $\Pi x \wedge \Pi y \wedge x \neq y \wedge \Gamma z \wedge \Lambda x z \wedge \Lambda y z \wedge \Gamma u \wedge \Lambda x u \wedge \Lambda y u \rightarrow z = u$.

I 3. *a*) $\Gamma x \rightarrow \exists y \exists z (\Pi y \wedge \Pi z \wedge y \neq z \wedge \Lambda y x \wedge \Lambda z x)$.

b) $\exists x \exists y \exists z (\Pi x \wedge \Pi y \wedge \Pi z \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \neg \exists u (\Gamma u \wedge \Lambda x u \wedge \Lambda y u \wedge \Lambda z u))$.

I 4. *a*) $\Pi x \wedge \Pi y \wedge \Pi z \rightarrow \exists u (\Delta u \wedge \Lambda x u \wedge \Lambda y u \wedge \Lambda z u)$.

b) $\Delta x \rightarrow \exists y (\Pi y \wedge \Lambda y x)$.

I 5. $\Pi x \wedge \Pi y \wedge \Pi z \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \neg \exists u (\Gamma u \wedge \Lambda x u \wedge \Lambda y u \wedge \Lambda z u) \wedge \Delta v \wedge \Lambda x v \wedge \Lambda y v \wedge \Lambda z v \wedge \Delta w \wedge \Lambda x w \wedge \Lambda y w \wedge \Lambda z w \rightarrow v = w$.

I 6. $\Pi x \wedge \Pi y \wedge x \neq y \wedge \Gamma z \wedge \Lambda x z \wedge \Lambda y z \wedge \Delta u \wedge \Lambda x u \wedge \Lambda y u \wedge \Pi v \wedge \Lambda v z \rightarrow \Lambda v u$.

I 7. $\Delta x \wedge \Delta y \wedge \Pi z \wedge \Lambda z x \wedge \Lambda z y \rightarrow \exists u (\Pi u \wedge u \neq z \wedge \Lambda u x \wedge \Lambda u y)$.

I 8. $\exists x \exists y \exists z \exists u (\Pi x \wedge \Pi y \wedge \Pi z \wedge \Pi u \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq u \wedge y \neq z \wedge y \neq u \wedge z \neq u \wedge \neg \exists v (\Delta v \wedge \Lambda x v \wedge \Lambda y v \wedge \Lambda z v \wedge \Lambda u v))$.

Ahora bien, no es absolutamente necesario reunir en uno solo los tres campos de individuos: podemos también operar con varios géneros de variables individuales, y de este modo llegamos a un *cálculo múltiple de predicados*. En este caso sean $x_1, x_2, x_3, \ldots$ variables para puntos, $y_1, y_2, y_3, \ldots$ variables para rectas y $z_1, z_2, z_3, \ldots$ variables para planos. Las fórmulas primarias se definen así: se obtiene una fórmula primaria cuando detrás del signo «Λ» se colocan en el primer lugar una variable para puntos y en el segundo lugar una variable para rectas o una para planos; también se llega a una fórmula primaria cuando delante y detrás del signo «$=$» se colocan variables del mismo género. Por lo demás, la formación de las fórmulas es la misma que antes. En lo que se refiere a las fórmulas con cuantificadores, $\exists x_1 \mathfrak{A}(x_1)$, $\exists y_1 \mathfrak{A}(y_1)$, $\exists z_1 \mathfrak{A}(z_1)$, etc., son fórmulas únicamente cuando lo son las mismas una vez eliminados los cuantificadores.

Los axiomas adoptan entonces una forma más sencilla; escribiremos los primeros, por ejemplo, del siguiente modo:

I 1. $\exists\, y_1\,(A\, x_1\, y_1 \wedge A\, x_2\, y_1)$.

I 2. $x_1 \neq x_2 \wedge A\, x_1\, y_1 \wedge A\, x_2\, y_1 \wedge A\, x_1\, y_2 \wedge A\, x_2\, y_2 \rightarrow y_1 = y_2$.

I 3. *a*) $\exists\, x_1 \exists\, x_2\,(x_1 \neq x_2 \wedge A\, x_1\, y_1 \wedge A\, x_2\, y_1)$.

b) $\exists\, x_1 \exists\, x_2 \exists\, x_3\,(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge$
$\wedge\, \neg\, \exists\, y_1\,(A\, x_1\, y_1 \wedge A\, x_2\, y_1 \wedge A\, x_3\, y_1))$.

Las fórmulas elementales lógicas se construyen como antes, con la única salvedad de que ha de observarse la restricción a que ahora están sujetas las fórmulas. No varía nada en las reglas de deducción (a) . . . (d), ni en la regla de separación: solamente es preciso cumplir la condición de que, en (c), la variable libre de la fórmula superior y la ligada de la fórmula inferior han de ser del mismo género; análogamente ocurre con estas variables en la fórmula superior y en la inferior de (d).

ARNOLD SCHMIDT [22] ha investigado con mayor detalle las relaciones existentes entre un cálculo múltiple de predicados y el correspondiente cálculo simple.

En los sistemas de axiomas estudiados hasta ahora, ya hubieran sido formulados como múltiples, ya como simples, se trataba siempre de un número finito de axiomas, todos ellos fórmulas en el sentido previamente definido: a estos sistemas de axiomas los llamamos de *primer grado*, y las consideraciones generales hechas al comienzo del presente parágrafo solamente valen para ellos. Pero existen sistemas de otro carácter, que llamamos sistemas de axiomas de *segundo grado*.

Con objeto de aclarar esto vamos a dar el *sistema de axiomas de* PEANO *para los números naturales*. En él, además de la identidad aparece otro predicado diádico, la relación de sucesión. Los axiomas dicen así:

a) 1 es número natural.

b) Dado un número natural, existe ni más ni menos que otro sucesivo suyo.

c) 1 no es sucesivo de ningún número.

d) Números distintos tienen distintos sucesivos.

e) Para cualesquiera propiedades de los números naturales se cumple lo siguiente: si 1 posee tal propiedad y si siempre que un número natural posee esa propiedad la posee también su sucesivo, entonces todos los números naturales poseen tal propiedad.

El sistema no es completo, ya que se pueden introducir definiciones recurrentes para funciones de la teoría de números: por ejemplo, si se quieren demostrar teoremas sobre la suma ha de adjuntarse a los axiomas la defini-

ción recurrente de la suma. Con todo, por el momento esto no tiene importancia.

El campo de individuos se forma aquí con los números naturales. Como predicado específico aparece «y es el sucesivo de x», que transcribiremos por «$\Phi\, x\, y$». La formulación simbólica de los primeros cuatro axiomas se realiza del modo ordinario. Pero aquí el primer axioma no recibe formulación aparte, ya que está implícito que hemos de admitir a 1 entre los objetos y que hemos de formar del modo correspondiente las fórmulas primarias, tal como se indicó antes. Podemos desglosar el axioma *b*) en dos partes:

b 1) Todo número tiene un sucesivo (es decir, por lo menos uno).

b 2) Todo número tiene a lo más un sucesivo.

La formulación simbólica reza:

b 1) $\exists\, y\, \Phi\, x\, y.$

b 2) $\Phi\, x\, y \wedge \Phi\, x\, z \rightarrow y = z.$

c) $\neg\, \Phi\, x\, 1.$

d) $x \neq y \wedge \Phi\, x\, z \wedge \Phi\, y\, u \rightarrow z \neq u.$

Pero, frente a ésto, no podemos formular *e*) —que versa sobre una propiedad cualquiera— sin emplear una variable predicado. En este caso escribiríamos:

e) $F\, 1 \wedge \forall\, x\, \forall\, y\, (F\, x \wedge \Phi\, x\, y \rightarrow F\, y) \rightarrow \forall\, x\, F\, x.$

Mas para poder sacar partido verdaderamente de este axioma deberíamos añadir a nuestras reglas de deducción una regla de reemplazamiento para variables predicado. Sin embargo, en caso de que queramos —como es deseable— permanecer dentro del campo de las fórmulas que se construyen exclusivamente a partir de las fórmulas primarias $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ y $\Phi\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}$ (en que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son variables individuales), existe aún otro camino: sustituimos la formulación anterior de *e*) por un número infinito de axiomas, por lo que se llama un esquema axiomático; sea $\mathfrak{A}(x)$ una fórmula cualquiera construida con Φ y «$=$», que contenga la variable libre x: para cada una de tales $\mathfrak{A}$ tenemos, pues, un axioma

$$\mathfrak{A}(1) \wedge \forall\, x\, \forall\, y\, (\mathfrak{A}(x) \wedge \Phi\, x\, y \rightarrow \mathfrak{A}(y)) \rightarrow \forall\, x\, \mathfrak{A}(x).$$

[suponemos aquí que y no aparece en $\mathfrak{A}(x)$]. Por tanto, nos bastan nuestras reglas de deducción (a)... (d) y la regla de separación. Naturalmente, para cada proceso deductivo puede utilizarse únicamente un número finito de axiomas de este último tipo.

Un sistema de axiomas como el anterior, que contiene infinitos axiomas del mismo tipo, se llama un sistema axiomático de *segundo grado*. (También pueden aparecer diversos esquemas axiomáticos.)

Aquí ya no se mantiene el hecho, mencionado al principio de este parágrafo, de que una fórmula determinada es una consecuencia de los axiomas

siempre y únicamente cuando cierta expresión del cálculo de predicados de los §§ 4 ó 9 es universalmente válida.

§ 11. El problema de la decidibilidad

Se entiende por *problema de la decidibilidad,* como ya se ha dicho, el de comprobar la validez universal de las expresiones, o también el problema dual de la comprobación de la cumplibilidad de las expresiones. Mientras que en el cálculo de proposiciones y en el de clases podía hallarse una solución total del problema de la decidibilidad, el caso es diferente para el cálculo de predicados: pero no es solamente que de momento no se disponga de una solución completa de este problema, sino que existen razones que excluyen el que lleguemos nunca a encontrarnos en posesión de una solución completa como en los otros casos.

Puesto que las expresiones del cálculo de predicados se numeran, es decir, se puede afectar a cada una con un número natural a modo de índice, a un proceso general de solventar la decidibilidad correspondería una función de la teoría de números que adoptase uno de los dos valores 1 ó 2: tomaría el valor 1 para un número natural n cuando n fuese el índice de una expresión que fuera universalmente válida, y el valor 2 cuando fuese n el índice de una expresión no universalmente válida; además, esta función debería ser calculable, o sea que habría de existir un proceso que, aplicado a un número cualquiera n, diera uno de los dos valores de la función, 1 ó 2, tras ejecutar un número finito de pasos calculatorios. El concepto, de contenido algo vago, de función calculable, ha sido precisado por diversos autores con puntos de partida diferentes —por ejemplo, A. CHURCH, S. C. KLEENE, A. M. TURING, E. POST y K. GÖDEL— y con éxito total, ya que se ha demostrado que todas las definiciones de función calculable son equivalentes. A. CHURCH [5] ha mostrado el primero que la función arriba mencionada, que correspondería al proceso general de solventar la decidibilidad, no pertenece a las funciones calculables; no podemos especificar en esta obra las particularidades de tal investigación, y remitimos acerca de ella al libro de S. C. KLEENE [19].

No ha de malentenderse este resultado, por lo demás, en el sentido de que podrían presentarse expresiones determinadas acerca de las cuales se probase que no es factible decidir si son universalmente válidas o no: de hecho, no es posible tal prueba. Pues si se puede probar que no cabe decir nada acerca de la validez universal o no de una expresión, existe también una demostración de que tal expresión no es deductible en el sistema de axiomas del § 4, o sea que —debido a la completitud de este sistema de axiomas— se tendría una demostración de que la expresión no era universalmente válida, contra lo que se había supuesto.

Mas la imposibilidad de un proceso general para solventar la decidibilidad quiere decir lo siguiente: se han encontrado procesos de esta índole para clases especiales de expresiones, y hemos de suponer que se encontrarán procesos análogos para aún otras clases de expresiones; ahora bien, todos estos procesos callan acerca de expresiones cualesquiera. Con esto se aclara también al mismo tiempo por qué los esfuerzos para ampliar el campo de las expresiones cuya validez universal puede decidirse en uno u otro sentido, tropiezan cada vez con mayores dificultades.

A continuación daremos algunos teoremas generales referentes al problema de la decidibilidad y la solución de éste en algunos casos sencillos.

TEOREMA XXVI. Si una expresión es válida en un campo de individuos, también lo es en todo campo de individuos con el mismo número cardinal. (Se dice que dos campos tienen el mismo número cardinal cuando sus respectivos elementos pueden representarse mutuamente de modo biunívoco) [18].

Es fácil demostrar este teorema. Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ dos campos con el mismo número cardinal; si α es un elemento de $\mathfrak{B}$, el elemento de $\mathfrak{B}'$ correspondiente unívocamente con él, será α'. Si Φ es un predicado p-ádico definido en $\mathfrak{B}$, entenderemos por Φ' —el predicado correspondiente a él en $\mathfrak{B}'$— lo que se expresa en la siguiente definición: $\Phi'\,\alpha'_1 \ldots \alpha'_p$ será verdadera siempre y únicamente cuando $\Phi\,\alpha_1 \ldots \alpha_p$ sea verdadera; la relación entre Φ y Φ' es asimismo biunívoca. Sea ahora $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k)$ una expresión que contenga como únicas variables predicado $F_1, \ldots, F_r$, y como únicas variables individuales libres, $x_1, \ldots, x_k$; si $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son respectivamente predicados y objetos de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ será verdadera cuando lo sea $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)$, y sólo en este caso.

Mostraremos que ocurre así por inducción según el número total de los signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que aparezcan en $\mathfrak{A}$. Si este número es 0, se trata de fórmulas $\Psi\,\beta_1 \ldots \beta_p$ y $\Psi'\,\beta'_1 \ldots \beta'_p$, que tienen el mismo valor veritativo; lo mismo ocurre con las dos fórmulas $\alpha = \beta$ y $\alpha' = \beta'$, ya que la representación de los dos campos es biunívoca entre ellos. Si $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\neg\,\mathfrak{C}$, o incluso la $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$, se sigue que el teorema es verdadero de que, por hipótesis, lo es para $\mathfrak{C}$ o, respectivamente, para $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$. Si $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\exists\, y\, \mathfrak{C}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k, y)$, entonces $\exists\, y\, \mathfrak{C}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, y)$ será verdadera siempre y solamente cuando exista una β tal que $\mathfrak{C}(\Phi_1, \ldots$ $\ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta)$ sea verdadera; por hipótesis, esto último ocurre siempre y únicamente cuando $\mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \beta')$ es verdadera, o sea cuando $\exists\, y\, \mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, y)$ lo es.

Con lo cual hemos demostrado el teorema XXVI. Pues si $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r,$ $x_1, \ldots, x_k)$ es verdadera en $\mathfrak{B}$, también ha de ser verdadera $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r,$

---

[18] Véase, p. ej., la definición de representación que se da en el Teorema XXVII. *(N. del T.)*

$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$) para $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$, cualesquiera, ya que ocurre análogamente con $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Podemos desglosar lo siguiente del teorema XXVI. *Si una expresión no es universalmente válida y tampoco ocurre que no sea válida en ningún campo, el postular la validez de tal expresión en un campo de individuos es equivalente a decir algo acerca del número cardinal de este campo de individuos (acerca de su número de individuos).*

Es posible, por tanto, tener a la vista una versión *más rigurosa del problema de la decidibilidad. Mientras que en la versión más sencilla se trata únicamente de si una expresión es o no universalmente válida, en la versión más rigurosa han de darse, además, en caso de que la expresión no sea universalmente válida, los números cardinales de los campos en los que la expresión es válida, o en caso contrario ha de comprobarse que no existen números cardinales de este tipo.*

En lo que se refiere a la relación entre ambas versiones del problema de la decidibilidad, se había hecho patente ya en el § 8, teorema XXIV, un resultado importante: *si una expresión es válida en un campo de individuos indefinidamente numerable (o sea, en el campo de los números naturales), es universalmente válida.*

Observemos que este enunciado sólo es válido para expresiones que no incluyan la identidad. Tomemos, así, la expresión «$\exists x \exists y (x \neq y \wedge (F x \vee \vee \neg F x))$»: es válida en el campo de los números naturales, pues si Φ es un predicado monádico cualquiera en este campo, «$1 \neq 2 \wedge (\Phi 1 \vee \neg \Phi 1)$» es verdadera; por el contrario, tal expresión es falsa en un campo que contenga un solo elemento, cualquiera que sea el reemplazamiento que se haga, ya que «$\exists x \exists y (x \neq y)$» es en este caso falsa. Postular la validez de esta expresión no quiere decir sino que el campo de individuos contiene al menos dos elementos.

El teorema siguiente completa lo anterior, si bien sólo es válido para expresiones sin inclusión de la identidad.

TEOREMA XXVII. *Si una expresión es válida en un campo de individuos, $\mathfrak{B}$, también lo será en un campo $\mathfrak{B}'$ que proceda del $\mathfrak{B}$ por supresión de elementos de éste.*

Representamos $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$ cuando a cada elemento α de $\mathfrak{B}$ le coordinamos un elemento α' de $\mathfrak{B}'$; si α mismo es elemento de $\mathfrak{B}'$, será $\alpha' = \alpha$; si α no es elemento de $\mathfrak{B}'$, será $\alpha' = \gamma$ —en que γ ha de ser un elemento de $\mathfrak{B}'$ escogido irrevocablemente. A cada predicado p-ádico, Φ', de $\mathfrak{B}'$ hacemos corresponder unívocamente un predicado p-ádico, Ψ, de $\mathfrak{B}$, de suerte que $\Psi \alpha_1 \ldots \alpha_p$ sea verdadero cuando lo sea $\Phi' \alpha'_1 \ldots \alpha'_p$, y sólo en este caso.

Sea ahora $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k)$ una expresión cualquiera (no se harán aparecer variables proposicionales por motivos de sencillez, aun cuando no presentaría dificultades el considerarlas); sean además $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r$ predi-

cados cualesquiera sobre $\mathfrak{B}'$ cuyos números de lugares vacíos correspondan a $F_1, \ldots, F_r$, y $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ los predicados respectivos sobre $\mathfrak{B}$; y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ objetos cualesquiera de $\mathfrak{B}$, así como $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$ los coordinados a ellos de $\mathfrak{B}'$. Afirmamos ahora que $\mathfrak{A}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ y $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots$ $\ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)$ tienen precisamente el mismo valor veritativo.

Mostraremos tal cosa mediante una inducción según el número total de signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que aparezcan en $\mathfrak{A}$. Si dicho número es 0, $\mathfrak{A}$ es una fórmula primaria, y la verdad de nuestra aserción se deriva inmediatamente de la definición de las Ψ_i (es esencial que no aparezcan fórmulas primarias $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$). En otro caso $\mathfrak{A}$ tendrá una de las formas $\neg\, \mathfrak{C}$ o $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$, y la validez de la afirmación hecha se sigue de que es válida para la expresión $\mathfrak{C}$ o para las expresiones $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, todas las cuales contienen menor número de signos. Si $\mathfrak{A}$ tiene la forma $\exists y\, \mathfrak{C}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k, y)$, la validez de $\exists y\, \mathfrak{C}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, y)$ significa que existe un elemento β de $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{C}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta)$ es verdadera; por hipótesis, entonces también $\mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \beta')$ es verdadera, y por tanto también lo es $\exists y\, \mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, y)$; si, por el contrario, $\exists y\, \mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots$ $\ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, y)$ es verdadera, existe un elemento β de $\mathfrak{B}'$ tal que $\mathfrak{C}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \beta)$ es verdadera; como $\beta' = \beta$, por hipótesis $\mathfrak{C}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta)$ es verdadera, y por ello también lo es $\exists y\, \mathfrak{C}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, y)$

Ahora se sigue inmediatamente nuestro teorema XXVII. Sea verdadera en $\mathfrak{B}$ la expresión $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k)$; sean además $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r$ predicados cualesquiera definidos en $\mathfrak{B}'$, y $\beta_1, \ldots, \beta_k$ elementos cualesquiera de $\mathfrak{B}'$; sean $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ los predicados sobre $\mathfrak{B}$ correspondientes a los $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r$. Entonces, por hipótesis, $\mathfrak{A}(\Psi_1, \ldots, \Psi_r, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ es verdadera; de la aserción demostrada se sigue —puesto que $\beta'_1 = \beta_1, \ldots, \beta'_k = \beta_k$— que también $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_k, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ es verdadera: pero esto quiere decir que la expresión $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_k)$ es también verdadera en $\mathfrak{B}'$.

Para la versión general del problema de la decidibilidad tiene importancia la siguiente observación: existen expresiones que son válidas en todos los campos finitos de individuos, pero no en el de los números naturales.

A estas expresiones pertenece, por ejemplo,

$$\text{«}\exists x \forall y \neg F x y \vee \exists x F x x \vee \exists x \exists y \exists z (F x y \wedge F y z \wedge \neg F x z)\text{»}.$$

Pues sea «$x < y$» la relación ordinaria de desigualdad en el campo de los números naturales: «$\exists x (x < x)$» es falsa; «$\exists x \forall y \neg (x < y)$» es también falsa, ya que «$\forall x \exists y (x < y)$» es verdadera por ser «$\forall x (x < x + 1)$» verdadera; además, «$\exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z \wedge \neg (x < z))$» es falsa, ya que la relación «$x < y$» posee la propiedad de la transitividad; como también «$\exists x \forall y \neg (x < y) \vee \exists x (x < x) \vee \exists x \exists y \exists z (x < y \wedge y < z \wedge \neg (x < z))$»

es falsa, la expresión de que nos ocupamos es falsa en el campo de los números naturales.

Tomemos ahora un campo de individuos finito cualquiera, y fijémonos en el predicado diádico definido en él, Φ. Con tal predicado Φ puede ocurrir que $\exists x \exists y \exists z (\Phi x y \wedge \Phi y z \wedge \neg \Phi x z)$ sea verdadera, y entonces la expresión arriba mencionada será verdadera cuando en ella reemplacemos F por Φ; atendamos ahora solamente a los predicados Φ para los que $\exists x \exists y \exists z (\Phi x y \wedge \wedge \Phi y z \wedge \neg \Phi x z)$ sea falsa, y por tanto, $\forall x y z (\Phi x y \wedge \Phi y z \rightarrow \Phi x z)$ verdadera: entonces Φ será transitivo; si para un predicado de este tipo «$\exists x \forall y \neg \Phi x y$» es verdadera, de nuevo la expresión anterior será verdadera cuando en ella reemplacemos F por Φ; para los restantes predicados del tipo considerado «$\exists x \forall y \neg \Phi x y$» será falsa, es decir, «$\forall x \exists y \Phi x y$» será verdadera: entonces, para cada objeto α del campo de individuos existe otro β tal que $\Phi \alpha \beta$ es verdadera, y pueden ocurrir dos casos, que β sea idéntico a α o que sea diferente; extraemos ahora del campo de individus —que podrá tener n elementos— un objeto arbitrariamente elegido, α_1: existen entonces los objetos $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, tales que todas las proposiciones $\Phi \alpha_1 \alpha_2, \Phi \alpha_2 \alpha_3, \ldots, \Phi \alpha_n \alpha_{n+1}$ son verdaderas; pero como tenemos solamente n elementos, no pueden ser distintos todos los objetos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$; sea, pues, $\alpha_i = \alpha_k (i < k)$: si $k = i + 1$, entonces se tendrá $\Phi \alpha_i \alpha_i$, y en caso contrario ocurrirá que todas las proposiciones $\Phi \alpha_i \alpha_{i+1}, \Phi \alpha_{i+1} \alpha_{i+2}, \ldots$ $\ldots, \Phi \alpha_{k-1} \alpha_k (k > i + 1)$ serán verdaderas; debido a la transitividad de Φ, de la validez de $\Phi \alpha_i \alpha_{i+1}$ y $\Phi \alpha_{i+1} \alpha_{i+2}$ se sigue la de $\Phi \alpha_i \alpha_{i+2}$, de la validez de $\Phi \alpha_i \alpha_{i+2}$ y $\Phi \alpha_{i+2} \alpha_{i+3}$ se sigue la de $\Phi \alpha_i \alpha_{i+3}$, etc., y finalmente se encuentra la validez de $\Phi \alpha_i \alpha_k$; mas como $\alpha_i = \alpha_k$, también en este caso se halla que $\Phi \alpha_i \alpha_i$ es verdadera: por tanto, $\exists x \Phi x x$ es verdadera; pero esto quiere decir que la expresión es verdadera, cualquiera que sea Φ, cuando en ella reemplazamos F por Φ. Con lo cual se ha mostrado la validez de la expresión del caso en todos los campos finitos de individuos.

Para la teoría general del problema de la decidibilidad son importantes ciertos *teoremas de reducción*, que coordinan a cada expresión otra que posee una forma normalizada o reducida, y tal que la validez universal de la expresión de partida y la de la expresión reducida constituyen el objeto de problemas equivalentes. El paso a la forma normal prenexuada, y aún en mayor medida el paso a la forma normal skolemiana, representaron ya reducciones de este tipo. Ahora bien, existe una serie de teoremas de reducción, de los cuales mencionaremos solamente los más importantes; en lo que se refiere a sus demostraciones, hemos de remitir en todos los casos a la bibliografía original que citamos.

En primer término, para cada expresión puede darse otra equivalente en lo que respecta a la cuestión de la validez universal y que contiene exclusivamente variables predicado monádicas y diádicas (véase L. LÖWENHEIM [20]).

Es posible asimismo limitarse a una variable predicado diádica única (cf. L. KALMAR [14]). Otros teoremas de reducción presentan formas especiales del prefijo, tales como la skolemiana $\exists x_1 \ldots x_m \forall y_1 \ldots y_n$: para cada expresión puede darse otra, equivalente desde el punto de vista de la validez universal, que tiene el prefijo en la forma $\exists x \exists y \exists z \forall u_1 \ldots \forall u_n$ (cf. K. GÖDEL [8]), o bien en la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_m \forall y$ o en la $\exists x \exists y \forall z \exists u_1 \ldots \exists u_n$ (cf. J. PEPIS [21]; otros tipos análogos de prefijos son $\exists x \exists y \forall z_1 \ldots \forall z_n \exists u$ (véase L. KALMAR [16] y $\forall x \exists y \forall z \exists u_1 \ldots \exists u_n$ (cf. W. ACKERMANN [1]). En todos estos casos se tiene, o bien un número que anticipadamente se sabe ser finito de signos de existencia, o un número del mismo tipo de signos universales. Además, L. KALMAR y J. SURANYI [15, 16, 17 y 18] han valorado el resultado anterior y han mostrado que al aplicar los tipos anteriores de prefijos es posible limitarse a una variable predicado diádica única. L. SURANYI ha logrado una reducción aún mayor con los tipos de prefijos $\exists x \exists y \exists z \forall u$, o $\exists x \exists y \forall z \exists u$, o $\exists x \forall y \forall z \exists u \exists v$, o $\forall x \exists y \forall z \exists u \exists v$ (véase J. SURANYI [31 y 32]), en los cuales también está limitado el número total de cuantificadores; pero en el caso de estos últimos tipos de prefijos no cabe limitar el número de variables predicados.

Estos teoremas de reducción y otros no citados son de gran valor —como ya hemos dicho— en la teoría general del problema de la decidibilidad. Puesto que, con todo, no es posible contar con una solución general de tal problema, ésto significa que el problema de la decidibilidad tampoco puede resolverse en general para expresiones que contengan únicamente una variable predicado diádica, ni para todas las expresiones que tengan un prefijo de las formas $\exists x \exists y \exists z \forall u$, etc.

Vamos a informar ahora acerca de algunos de los casos especiales más sencillos del problema de la decidibilidad para los que se ha tenido la fortuna de llegar a una solución; en el libro [2] del autor se encuentra un resumen completo de estos casos particulares resueltos.

En general podemos decir que tales casos especiales presentan cierto paralelo con los teoremas de reducción arriba mencionados. A la proposición que dice que para cada expresión del cálculo de predicados puede darse otra equivalente en lo que se refiere a la validez universal, corresponde la proposición de que *se ha conseguido la decidibilidad en el campo de las expresiones que contienen únicamente variables predicado monádicas. A la reducción a tipos de prefijos determinados corresponden teoremas que dan solución al problema de la decidibilidad para ciertos tipos de prefijos.*

Veamos en primer lugar las expresiones que sólo contienen variables predicado monádicas. L. LÖWENHEIM [20] es el primero que ha reconocido la posibilidad básica de la decidibilidad en este campo. TH. SKOLEM [29] y H. BEHMANN [3] han dado demostraciones más sencillas. Con el método de

resolución se abarcan también las expresiones que además de las variables predicados monádicos contienen también la identidad.

Nos limitaremos aquí a las expresiones sin inclusión de la identidad. Observaremos primeramente que en las explicaciones del capítulo II se contiene ya una solución del problema de la validez universal de estas expresiones, puesto que *el cálculo con variables predicado monádicas se encuentra en estrecha relación con el cálculo de clases allí descrito*. Estudiaremos más de cerca la relación entre ambos cálculos.

Sea $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ una expresión en que sólo aparezcan las variables predicado monádicas $(F_1, \ldots, F_r$, y ocurra además que esta expresión no contenga ninguna variable individual libre. Podemos entonces señalar una expresión $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_r)$ del cálculo de clases que sólo contiene las variables de clase $a_1, \ldots, a_r$ y tal que $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ sea válida en un campo de individuos cuando $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_r)$ lo sea en el mismo campo, y únicamente en este caso.

Sea J un campo de individuos cualquiera, y $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sean predicados cualesquiera definidos en tal campo. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ las clases correspondientes a los predicados $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$; esto quiere decir que para todo x ocurre que x es un elemento de α_i siempre y exclusivamente cuando $\Phi_i x$ es verdadera. Transformamos ahora paso a paso $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ en una expresión equivalente, $\mathfrak{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, para lo cual hacemos desaparecer progresivamente los cuantificadores y los signos de predicado. (Admitamos que en $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ aparezca, además de los signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$», posiblemente la abreviación «$\wedge$»).

Extraemos de $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ el símbolo de existencia más interno, es decir, aquél en cuyo campo de afección no se encuentra ningún otro signo de existencia. Sea $\exists x$ dicho signo de existencia, y $\mathfrak{C}(x)$ su campo de afección. Podemos ahora sustituir, en $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, $\exists x\, \mathfrak{C}(x)$ por $\exists x\, (\mathfrak{D}_1(x) \vee \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m(x) \vee \mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n)$, en donde el nuevo campo de afección de $\exists x$ es una forma normal disyuntiva de $\mathfrak{C}(x)$ y $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ no contienen la variable x. Podemos además sustituir $\exists x\, (\mathfrak{D}_1(x) \vee \ldots \vee \mathfrak{D}_m(x) \vee \mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n)$ de modo equivalente por $\exists x\, \mathfrak{D}_1(x) \vee \ldots \vee \exists x\, \mathfrak{D}_m(x) \vee \mathfrak{E}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{E}_n$ [cf. las fórmulas (26) y (27) del § 4]. Cada una de las $\mathfrak{D}_i(x)$ es una conyunción de fórmulas primarias o de fórmulas primarias negadas. En cada $\exists x\, \mathfrak{D}_i(x)$ extraemos ahora fuera del campo del cuantificador aquellas fórmulas primarias o fórmulas primarias negadas que no contienen la variable x, para lo cual aplicamos la fórmula (24) del § 4 y tenemos en cuenta que en $\mathfrak{D}_i(x)$ podemos permutar arbitrariamente los miembros conyuntivos: por ejemplo, sustituiremos la fórmula $\exists x\, (\mathfrak{H}_1(x) \wedge \mathfrak{R} \wedge \mathfrak{H}_2(x))$ —en que $\mathfrak{R}$ no contendrá la variable x— por $\exists x\, (\mathfrak{H}_1(x) \wedge \mathfrak{H}_2(x)) \wedge \mathfrak{R}$. De este modo, suponemos que el campo de afección de $\exists x$ en $\exists x\, \mathfrak{D}_i(x)$ se habrá reducido a $\exists x\, \mathfrak{G}_i(x)$, que —sin tener en cuenta el orden de sucesión de los miembros conyuntivos— tendrá la forma $\exists x\, (\Phi_{j_1} x \wedge \ldots \wedge \Phi_{j_p} x \wedge \neg \Phi_{l_1} x_j \wedge \ldots \wedge \neg \Phi_{l_q} x)$; esta fórmula no significa

otra cosa sino que la intersección de las clases $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}, \bar{\alpha}_{l_1}, \ldots, \bar{\alpha}_{l_q}$ no es una clase vacía [una proposición que podemos transcribir, por ejemplo, con $\neg(\alpha_{j_1} \cap \ldots \cap \alpha_{j_p} \cap \bar{\alpha}_{l_1} \cap \ldots \cap \bar{\alpha}_{l_q} = \alpha_{j_1} \cap \bar{\alpha}_{j_1})$]. Si sustituimos ahora, en la expresión transformada $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, $\exists x\, \mathfrak{S}_i(x)$ por dichas fórmulas del cálculo de clases, todos los signos de existencia en que se había desglosado el signo de existencia más interno que habíamos considerado desaparecen de $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$, y en su lugar se encuentran clases.

Repetimos este proceso con la fórmula que así resulta, dedicándonos de nuevo al signo de existencia más interno que aparezca: para ello no nos estorban las fórmulas primarias con clases, ya que no contienen ninguna variable individual y por ello —como ya hemos dicho— salen, en el curso del proceso, fuera del campo de los signos de existencia de que nos ocupamos. Finalmente, hemos transformado de esta manera $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ en una expresión equivalente $\mathfrak{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, que no contiene ninguna variable individual; como los $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, y por tanto las $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, eran cualesquiera, hemos demostrado nuestro teorema.

Tomemos como ejemplo la expresión $\exists x F_1 x \wedge \exists y \neg \exists z (F_1 y \wedge (F_2 y \vee F_3 z))$, de modo que hemos de transformar $\exists x \Phi_1 x \wedge \exists y \neg \exists z (\Phi_1 y \wedge (\Phi_2 y \vee \Phi_3 z))$. Sustituiremos $\exists x \Phi_1 x$ por $\neg(\alpha_1 = \alpha_1 \cap \bar{\alpha}_1)$. $\exists z (\Phi_1 y \wedge (\Phi_2 y \vee \Phi_3 z))$ se transformará en $\exists z ((\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee (\Phi_1 y \wedge \Phi_3 z))$, luego en $(\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee \exists z (\Phi_1 y \wedge \Phi_3 z)$ y por fin en $(\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee (\Phi_1 y \wedge \exists z\, \Phi_3 z)$; esta última expresión puede escribirse $(\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee (\Phi_1 y \wedge \neg(\alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3))$, con lo cual $\exists x \Phi_1 x \wedge \exists y \neg \exists z (\Phi_1 y \wedge (\Phi_2 y \vee \Phi_3 z))$ habrá pasado a ser $\neg(\alpha_1 = \alpha_1 \cap \bar{\alpha}_1) \wedge \exists y \neg ((\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee (\Phi_1 y \wedge \neg(\alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)))$. $\neg \Phi_1 y \vee (\neg \Phi_2 y \wedge \alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)$ es una forma normal disyuntiva de $\neg((\Phi_1 y \wedge \Phi_2 y) \vee (\Phi_1 y \wedge \neg(\alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)))$. $\exists y (\neg \Phi_1 y \vee (\neg \Phi_2 y \wedge \alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3))$ se cambiará en $\exists y \neg \Phi_1 y \vee \exists y (\neg \Phi_2 y \wedge \alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)$, y luego en $\exists y \neg \Phi_1 y \vee (\exists y \neg \Phi_2 y \wedge \alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)$, que escrito al modo del cálculo de clases es $\neg(\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cap \bar{\alpha}_1) \vee (\neg(\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_2) \wedge (\alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3))$. Por tanto, $\exists x \Phi_1 x \wedge \exists y \neg \exists z (\Phi_1 y \wedge (\Phi_2 y \vee \Phi_3 z))$ habrá pasado a $\neg(\alpha_1 = \alpha_1 \cap \bar{\alpha}_1) \wedge (\neg(\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \cap \bar{\alpha}_1) \vee (\neg(\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \cap \bar{\alpha}_2) \wedge (\alpha_3 = \alpha_3 \cap \bar{\alpha}_3)))$, por lo cual la validez en un campo cualquiera de $\exists x F_1 x \wedge \exists y \neg \exists z (F_1 y \wedge (F_2 y \vee F_3 z))$ tiene el mismo significado que la de

$$\neg(a_1 = a_1 \cap \bar{a}_1) \wedge (\neg(\bar{a}_1 = a_1 \cap \bar{a}_1) \vee (\neg(\bar{a}_2 = a_2 \cap \bar{a}_2) \wedge (a_3 = a_3 \cap \bar{a}_3))).$$

Damos además un *segundo proceso de resolución del problema de la decidibilidad en el cálculo de predicados monádicos, y precisamente con él se solucionará el problema de la decidibilidad también en su versión más rigurosa.*

Tenga $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ el mismo significado que antes. Afirmamos ahora que *si una expresión $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ es válida en un campo de individuos que tiene 2^r elementos, es universalmente válida.*

Pero es posible comprobar la validez en un campo de individuos con 2^r elementos (cf. el § 3); además, si la expresión no es válida universalmente tampoco puede ser válida (si suponemos verdadera nuestra afirmación) en un campo con más de 2^r elementos, según el teorema XXVII. Por tanto, para conseguir ver en qué campos es válida la expresión basta investigar su validez en campos de individuos con $1, 2, \ldots, 2^r - 1$ elementos.

Demostremos ahora la afirmación mencionada. Suponemos que $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ es válida en un campo con 2^r elementos. Sea J un campo de individuos cualquiera y $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ predicados monádicos cualesquiera en él. A cada elemento de J coordinamos un acervo-r, $(n_1, \ldots, n_r)$, en que cada n_i es igual a $\curlyvee$ o a $\curlywedge$. Suponiendo que α sea un elemento de J, veamos la serie de proposiciones $\Phi_1 \alpha, \ldots, \Phi_r \alpha$; sustituyendo cada una de estas proposiciones por su valor $\curlyvee$ o $\curlywedge$ obtenemos el acervo-r coordinado con α. Los acervos-r a los cuales están coordinados los elementos de J forman un nuevo campo J', que tiene 2^r elementos o menos. (Llamaremos α' al elemento de J' coordinado con el elemento α de J.)

Sea ahora $\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_r, x_1, \ldots, x_m)$ una expresión parcial de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ que contenga las variables libres $x_1, \ldots, x_m$ (incluiremos el caso de que no aparezca ninguna variable libre); y consideraremos a $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ como una de sus propias expresiones parciales. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ objetos cualquiera de J, y $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ los objetos coordinados a ellos de J'. Afirmamos, pues, que $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ y $\mathfrak{B}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ tienen el mismo valor veritativo. Definimos los predicados Φ'_i sobre J' del modo siguiente: Φ'_i conviene a un acervo-r $(n_1, \ldots, n_r)$ siempre y únicamente cuando $n_i = \curlyvee$.

Para la demostración llevaremos a cabo una inducción según el número de los signos «$\neg$», «$\vee$» y «$\exists$» que aparezcan en $\mathfrak{B}$. Si este número es 0, $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tiene la forma $\Phi_i \alpha_j$; sea $\alpha'_j = (n_1, \ldots, n_r)$; por definición de α'_j, n_j es igual a $\curlyvee$ siempre y solamente cuando $\Phi_i \alpha_j$ tiene el valor $\curlyvee$; por tanto, y por definición de Φ'_i, $\Phi'_i \alpha'_j$ es verdadera siempre y exclusivamente cuando $\Phi_i \alpha_j$ es verdadera: con lo cual está demostrada nuestra afirmación en este caso especial. Sea ahora el caso de tener $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ la forma $\neg \mathfrak{C}$, o bien la $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$: la verdad de nuestro aserto se deriva entonces de que es válido para las formas, $\mathfrak{C}$, o $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, que contienen un número menor de signos. Tenga ahora $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ la forma $\exists y\, \mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, y)$; si la proposición es verdadera existe un elemento β de J tal que $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta)$ es verdadera; por hipótesis $\mathfrak{B}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \beta')$ es verdadera, y por tanto asimismo lo es $\exists y\, \mathfrak{B}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, y)$; pero al ser esta última verdadera existe un elemento β' de J' tal que $\mathfrak{B}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \beta')$ es verdadera; mas para β' existe un elemen-

to β en J al cual está coordinado β'; por hipótesis $\mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta)$ es verdadera, luego asimismo lo es $\exists y\, \mathfrak{B}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, y)$.

Tenemos, como un caso particular de la aserción demostrada, aquél en que $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ y $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r)$ tienen el mismo valor veritativo; ahora bien, $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ era válida en un campo con 2^r elementos; según el teorema XXVII también es válida en J'; por tanto, $\mathfrak{A}(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r)$ es verdadera, y con ella lo es $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$; pero puesto que $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ y el campo J eran cualesquiera, se sigue la validez universal de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$.

Los casos especiales resueltos que siguen se refieren a *una expresión que se encuentre en la forma normal prenexuada y tenga un prefijo especial.* (No ha de aparecer la identidad.)

1. Tenga el prefijo la forma $\forall x_1 \ldots x_m$.

La validez universal de una expresión $\forall x_1 \ldots x_m\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ es equivalente a la de $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$; pero esta última expresión es universalmente válida únicamente cuando puede deducirse en el sistema de axiomas del § 4. Puesto que no existen cuantificadores, intervienen solamente las reglas de deducción (a) y (b) del § 4, que también eran rectoras en el sistema axiomático del cálculo de proposiciones desarrollado en el capítulo I, § 9. Como, además, las fórmulas elementales del sistema de axiomas son tautologías, se sigue que $\forall x_1 \ldots x_m\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ será válida universalmente siempre que $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ sea una tautología, y únicamente cuando ocurra tal cosa.

Mostremos además en este caso todos los campos en los que la expresión es válida. La validez en un campo con n elementos implica la validez universal si $n \geqq m$. Sean $F_1, \ldots, F_r$ las variables predicado que aparecen en $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$, de suerte que esta expresión se designará más exactamente con $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, F_1, \ldots, F_r)$. La expresión es válida en un campo J cualquiera cuando $\mathfrak{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ es válida para predicados $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ arbitrariamente elegidos en J y que tengan los lugares vacíos correspondientes, y objetos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; pero en la validez de la última fórmula solamente intervienen los valores de $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ que se refieren al rellenado de los lugares vacíos con objetos de la serie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Completamos ahora el campo de los $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de un modo cualquiera hasta formar un campo J' con n elementos. En caso de que sea $n = m$ y de que todos los $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sean diferentes, este campo es $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Sean $\Phi'_1, \ldots, \Phi'_r$ predicados en J' que tengan el mismo valor que $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ cuando no se consideren otros objetos que los $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; entonces, $\mathfrak{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ es verdadera, ya que, por hipótesis, $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, F_1, \ldots, F_r)$ es válida en el campo J': pero con ello también es válida $\mathfrak{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \Phi_1, \ldots, \Phi_r)$.

Mas si la expresión no es universalmente válida no puede ser válida en campos que contengan m o más elementos; por tanto, basta investigar la validez en campos con $1, 2, \ldots, m - 1$ elementos.

2. Tenga el prefijo la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_m$.

Una expresión de la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ y de la que se suponga que no contiene ninguna variable individual libre, puede demostrarse en el sistema de axiomas del § 4 apoyándose exclusivamente en la regla (d), y ello —si no se tiene en cuenta la denominación de las variables— a partir de una expresión $\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m) \vee \exists x_2 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(y, x_2, \ldots, x_m)$; también esta expresión puede deducirse mediante (d), etc., de modo que la expresión que nos ocupa procedería finalmente de $\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m) \vee \vee \exists x_2 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(y, x_2, \ldots, x_m) \vee \ldots \vee \exists x_m \mathfrak{A}(y, \ldots, y, x_m) \vee \mathfrak{A}(y, \ldots, y)$ por aplicación reiterada de la regla (d); como además esta expresión sólo puede haberse encontrado mediante las reglas (a) y (b), tiene que ser una tautología; pero en este caso tal cosa puede querer decir únicamente que $\mathfrak{A}(y, \ldots, y)$ es una tautología: por tanto, la expresión $\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ será válida siempre que $\mathfrak{A}(y, \ldots, y)$ sea una tautología, y solamente en este caso.

Si la expresión es válida en un campo con un elemento, $\exists x \mathfrak{A}(x, \ldots, x)$ será válida en este mismo campo; pero $\exists x \mathfrak{A}(x, \ldots, x)$ es válida en un campo con un único elemento cuando $\mathfrak{A}(x, \ldots, x)$ es una tautología, como dijimos en el criterio dado en el § 3 para la validez-1 de expresiones; esto quiere decir que la validez-1 de $\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ implica su validez universal; por tanto, si la última expresión no es válida universalmente, no será válida en ningún campo: ya que, por lo pronto, no será válida-1, y según el teorema XXVII tampoco será válida en ningún campo que contenga más de un elemento.

3. Tenga el prefijo la forma $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n$ y la expresión, como antes, no pueda contener variables individuales libres.

La validez universal de $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ es equivalente a la de $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Esta última expresión puede solamente haberse originado, como la que hemos tratado en 2., por aplicación repetida de la regla (d) —y en esta aplicación hay que advertir que aparecerán las variables libres $x_1, \ldots, x_m$. Si de acuerdo con (d) se pasa a las fórmulas superiores, se obtienen una y otra vez disyunciones, entre cuyos miembros sólo aparecen expresiones —además de las que comienzan con signos de existencia— de la forma $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ (en donde las $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ son variables de la serie $x_1, \ldots, x_m$); por tanto, cuando nuestra expresión de partida sea universalmente válida han de serlo también tales disyunciones; y asimismo, pues, la disyunción entre cuyos miembros aparezcan todas las expresiones del tipo $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, y también las $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ y todos los miembros de la forma $\exists y_k \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, y_k, \ldots, y_n)$. Por otro lado, $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ puede deducirse de dicha disyunción —mediante una reordenación apropiada de los miembros— únicamente por medio de la regla (d), de modo que la cuestión de la validez universal de tal

disyunción y la de $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ son problemas equivalentes. Puesto que esta disyunción, por su parte, únicamente puede deducirse con ayuda de las reglas (a) y (b), en el caso de que exista validez universal ha de tratarse de una tautología; y como las expresiones que comienzan con un signo de existencia no desempeñan en ello ningún papel, se sigue que $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ será universalmente válida siempre y únicamente cuando la disyunción de todas las expresiones que tienen la forma $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ sea una tautología.

Sea ahora la expresión $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ válida en un campo con m elementos o más; de acuerdo con el teorema XXVII será también válida en campos que posean m elementos o menos. Designemos con $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ la disyunción arriba mencionada de todas las expresiones de la forma $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, y sean ahora $a_1, \ldots, a_n$ cualesquiera elementos iguales o distintos de un campo cualquiera. La expresión $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ es válida en el campo que consta de los m o menos elementos $a_1, \ldots, a_m$: esto es, no solamente es válida $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n)$, sino que también lo será $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_m)$. Por consiguiente, $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$ es universalmente válida, y con ella asimismo la expresión menos exigente $\exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$.

Pero si $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ no es universalmente válida, tampoco será válida en un campo que tenga m elementos o más; por tanto, para comprobar la validez de la expresión para campos cualesquiera, ha de investigarse solamente su validez en campos que tengan $1, 2, \ldots, m-1$ elementos.

Los tres casos particulares mencionados del problema de la decidibilidad quedaron solventados en un trabajo de P. BERNAYS y M. SCHÖNFINKEL [4].

Acerca de los demás casos especiales resueltos de este problema, en los cuales no se puede, por otra parte, llegar a demostrar lo que se desea con medios tan sencillos como los empleados aquí, diremos solamente lo que sigue. Es asimismo posible efectuar la decisión acerca de la validez universal para todas las expresiones que tengan un prefijo de la forma $\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \exists y_2 \forall z_1 \ldots \forall z_n$ (véanse K. GÖDEL [8], L. KALMAR [13] y K. SCHÜTTE [24 y 25]). Remitiremos también a la obra [2] del autor arriba citada, para lo que respecta al método aplicado en la resolución de estos casos especiales y de otros también resueltos y aquí no mencionados.

[En las ediciones alemanas de esta obra, hasta la 6.ª inclusive, aparece a continuación el siguiente teorema: *una expresión* $\exists x \mathfrak{A}(x)$ *que no contenga variables individuales libres será universalmente válida siempre y únicamente cuando* $\forall x \mathfrak{A}(x)$ *lo sea (aquí están incluidas las expresiones que contienen la identidad).*

Tal pretendido teorema es, sin embargo, falso —por lo que dejará de aparecer en las nuevas ediciones alemanas que puedan pu-

blicarse en el futuro—, ya que, según es bien sabido, el cuantificador universal no supone existencia, esto es, no exige que el campo de individuos que recorra su variable (o variables) no sea vacío, por lo cual, de $\forall\ x\ \mathfrak{A}\ (x)$ no puede concluirse, con toda generalidad, $\exists\ x\ \mathfrak{A}\ (x)$, pero ésta —el que se pudiera concluir tal cosa— era justamente la primera premisa en que se apoyaba la demostración del presunto teorema. (Puede obtenerse fácilmente un contraejemplo directo a lo afirmado en dicha premisa —según indica la editorial de la versión original, o sea, Springer Verlag— tomando para $\mathfrak{A}\ (x)$ la expresión $[P(x) \vee \forall\ y\ \neg\ P(y)]$.) *(N. del T.)*]

§ 12. El concepto de «aquel, el que»; introducción de funciones

Enlazamos ahora con las explicaciones del § 10. Esté establecido un sistema cualquiera axiomático del tipo allí descrito, y sea $\mathfrak{A}\ (x)$ una fórmula en el campo de este sistema que no contenga ninguna variable predicado y, en lo que respecta a variables individuales libres, que únicamente contenga la variable x. Sean deductibles además en tal sistema las dos fórmulas $\exists\ x\ \mathfrak{A}\ (x)$ y $\forall\ x\ y\ (\mathfrak{A}\ (x) \wedge \mathfrak{A}\ (y) \rightarrow x = y)$. En este caso existe exactamente una cosa con la propiedad $\mathfrak{A}\ (x)$, la cual queda definida unívocamente por medio de $\mathfrak{A}\ (x)$. En el lenguaje ordinario hablamos entonces de *la* cosa con la propiedad $\mathfrak{A}\ (x)$, y empleamos por tanto el artículo determinado; hablamos también en el mismo sentido de «aquella cosa que tiene la propiedad $\mathfrak{A}\ (x)$» —giro que aparece muy frecuentemente en el lenguaje cotidiano—. Empleamos la expresión «el rey de Grecia», lo cual implica que existe un rey de Grecia y que no existe más que un rey de Grecia; utilizamos expresiones como «la madre del señor Schmidt», «el poeta de 'Natán el sabio'» [19], «el mínimo común múltiplo de 18 y 24», etc., en el mismo sentido.

Con nuestro cálculo podemos imitar estos modos de expresarse. Estén deducidas, como hemos dicho antes, $\exists\ x\ \mathfrak{A}\ (x)$ y $\forall\ x\ y\ (\mathfrak{A}\ (x) \wedge \mathfrak{A}\ (y) \rightarrow x = y)$. Introducimos ahora en el cálculo un nuevo símbolo que hasta ahora no hayamos utilizado, por ejemplo α, para designar un individuo determinado; además añadimos a los axiomas, como nueva fórmula elemental, $\mathfrak{A}\ (\alpha)$. Ampliaremos de ahora en adelante el campo de las fórmulas primarias, y con él el de las demás fórmulas, de modo que se obtenga asimismo una fórmula primaria cuando también se puedan colocar detrás de una variable predicado signos de objetos determinados (en este caso, por lo pronto, α). A ello corresponde una ampliación de las fórmulas elementales y de las reglas de deducción, que indicaremos más adelante. $\exists\ x\ \mathfrak{A}\ (x)$ y $\forall\ x\ y\ (\mathfrak{A}\ (x) \wedge \mathfrak{A}\ (y) \rightarrow x = y)$ se llaman las *fórmulas unitarias* correspondientes a α.

De este modo puede introducirse una serie de símbolos de individuos unos a continuación de otros, por ejemplo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, —siempre que se de-

[19] Es decir, el autor de *Nathan der Weise*, Lessing. *(N. del T.)*

muestren las fórmulas unitarias correspondientes—, cada uno de los cuales signifique un objeto determinado. Frente a lo que ocurre en la utilización lingüística del artículo determinado, este proceso representa una simplificación, ya que aquí los símbolos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, no muestran por sí mismos su significado, sino que para captar éste es necesario retrotraerse al lugar en que se han introducido —y esto tiene importancia únicamente cuando se quieren aclarar las fórmulas en que aparecen α, β, etc. Pero podemos imitar el proceso lingüístico aún más fielmente. En lugar de introducir, como en el caso anterior, α como nuevo símbolo de individuo, introduzcamos $\iota_x \mathfrak{A}(x)$ y adjuntemos $\mathfrak{A}(\iota_x \mathfrak{A}(x))$ como fórmula elemental a los axiomas [el significado de «$\iota_x \mathfrak{A}(x)$» es «*la* cosa x con la propiedad $\mathfrak{A}(x)$»]. Se dice que la variable x está ligada en el interior de $\iota_x \mathfrak{A}(x)$. Por lo demás, no es necesario que las fórmulas unitarias estén formadas precisamente con la variable característica x: tales fórmulas unitarias pueden ser también, por ejemplo, $\exists y\, \mathfrak{A}(y)$ y $\forall x\, y\, (\mathfrak{A}(y) \wedge \mathfrak{A}(z) \rightarrow y = z)$; también en estos casos se pueden introducir, bien α como nuevo símbolo de individuo, bien $\iota_y \mathfrak{A}(y)$ —y en este último caso la nueva fórmula elemental que se adjunte será $\mathfrak{A}(\iota_y \mathfrak{A}(y))$; incluso es posible introducir cuantas «ι» se desee, una detrás de otra, al escribir las correspondientes fórmulas unitarias.

El proceso indicado puede generalizarse. Sea $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ una fórmula que no contenga ninguna variable predicado y solamente $x_1, \ldots, x_n, y$ como variables libres. Además, estén deducidas las fórmulas

$$\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$$

y

$$\forall x_1 \ldots x_n\, y\, z\, (\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z)$$

que también en este caso se llaman *fórmulas unitarias* (éstas quieren decir que para cada acervo-n, $x_1, \ldots, x_n$, existe exactamente *una* y con la propiedad $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$, o sea que $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ define una función que coordina el acervo-n al valor y). En este caso introduciremos en el cálculo un símbolo que aún no hayamos utilizado, por ejemplo φ, para una función de n argumentos, y adjuntaremos como nueva fórmula elemental $\forall x_1 \ldots x_n\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n))$. [Observemos, sin embargo, que tanto en las fórmulas unitarias como en las fórmulas elementales que acabamos de adjuntar pueden aparecer, en lugar de $x_1, \ldots, x_n, y, z$, otras variables individuales con el mismo derecho.] También ahora puede llevarse a cabo la introducción de funciones de modo múltiple, estableciendo las fórmulas unitarias correspondientes.

En este caso generalizado podemos asimismo representar explícitamente la dependencia de las fórmulas unitarias por medio de una ι. Si —como antes— las fórmulas unitarias son $\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$

y $\forall x_1 \ldots x_n\, y\, z\, (\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z)$, adjuntamos la nueva fórmula elemental $\forall x_1 \ldots x_n\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, \iota_y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y))$ —en la que $\iota_y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ entra como nuevo símbolo que puede colocarse en los lugares vacíos de las variables predicado.

Veremos qué aspecto toma ahora el mecanismo del proceso deductivo. El cambio fundamental con respecto a los sistemas de axiomas dados en el § 10, que operaban sin la generalización que aquí damos, consiste en que allí el concepto de fórmula que se había colocado inicialmente a la base permanecía inalterable, mientras que aquí tal concepto es al principio exactamente igual que allá, pero se amplía con cada introducción de una α, $\iota_x\, \mathfrak{A}(x)$, φ, o $\iota_y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Estén ya introducidas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\iota_x\, \mathfrak{A}_1(x), \ldots, \iota_x\, \mathfrak{A}_m(x)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, e $\iota_y\, \mathfrak{B}_1(x_1, \ldots, x_{i_1}, y), \ldots, \iota_y\, \mathfrak{B}_q(x_1, \ldots, x_{i_q}, y)$. Definimos en primer lugar el concepto de *término individual,* también llamado brevemente término: hemos de entender por ello un símbolo que puede introducirse en los lugares vacíos de un predicado. Los términos se construyen de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Las variables individuales son términos.

2. Los signos de objetos determinados que aparecen en los axiomas son términos.

3. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\iota_x\, \mathfrak{A}_1(x), \ldots, \iota_x\, \mathfrak{A}_m(x)$ son términos.

4. Si $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$ son términos y φ_i es símbolo de una función p-ádica, $\varphi_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p)$ es un término.

5. Si $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i_k}$ son términos, entonces $\iota_y\, \mathfrak{B}_k(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i_k}, y)$ es un término.

Se obtiene una fórmula primaria cuando se colocan términos en los lugares vacíos de un signo de predicado (también, en su caso, de una variable predicado): la construcción de las fórmulas es, por lo demás, la misma que hasta ahora.

Las primeras fórmulas elementales son los axiomas del sistema axiomático del caso, y luego vienen las nuevas fórmulas elementales que habíamos indicado se adjuntaban (al hablar de las fórmulas unitarias); tenemos además las fórmulas elementales lógicas 1) y 2), que hemos descrito en el § 9: en lo que se refiere a las fórmulas elementales 1), ha de observarse ahora que no solamente lo son las disyunciones allí explicadas —en las cuales un miembro disyuntivo tiene la forma $x = x$, $y = y$, etc.— sino también las disyunciones en las que se encuentra un miembro disyuntivo $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ (en que $\mathfrak{a}$ es un término cualquiera) en lugar de $x = x$; al reducir las fórmulas 2) a las 1) ha de tenerse en cuenta que tal eliminación puede tener lugar, no únicamente por eliminación de un miembro disyuntivo $\neg(x = y)$, como allí se indicaba,

sino en general por eliminación por modo análogo de un miembro disyuntivo $\neg(\mathfrak{a} = \mathfrak{b})$, en que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ sean términos.

Por lo que respecta a las reglas de deducción, tenemos como antes las (a) . . . (d) y la regla de separación; pero la regla (d) experimenta una generalización, de modo que ahora reza:

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \exists x\, \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \exists x\, \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}}$$

($\mathfrak{a}$ no necesita aquí ser precisamente una variable individual, sinó que puede ser un término cualquiera).

En las introducciones anteriores habíamos pensado por lo pronto en sistemas simples de axiomas; pero exactamente lo mismo se puede llevar a cabo la introducción de «aquel, el que» en un sistema axiomático múltiple. Si están deducidas $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ y $\forall x\, y\, (\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{A}(y) \rightarrow x = y)$, el nuevo término que se ha de introducir, ya sea α o $\iota_x \mathfrak{A}(x)$, pertenece al mismo género que la variable x en $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$, de suerte que las fórmulas primarias se han de construir del modo correspondiente. Además siguen valiendo las fórmulas unitarias $\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$ y $\forall x_1 \ldots x_n\, y\, z\, (\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \wedge \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y = z)$, con lo cual se tiene la siguiente regla de términos para los nuevos signos φ de funciones que se han de introducir: si $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ son términos respectivamente del mismo género que las variables $x_1, \ldots, x_n$, $\varphi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ será un término, y precisamente del mismo género que la variable y en $\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$; análogamente ocurre con $\iota_y \mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n, y)$.

La introducción del concepto de función, o del concepto correlativo ι, es especialmente ventajosa en las matemáticas, ya que de este modo las fórmulas se hacen más cortas y expresivas. Aduciremos como ejemplo sencillo los axiomas del *concepto de grupo*.

Decimos que los elementos de un campo de individuos forman un grupo cuando se cumplen los siguientes axiomas:

1. A cada pareja ordenada, α, β, del campo de individuos le está coordinado unívocamente un elemento γ del campo de individuos.

2. Sean α, β, γ elementos cualesquiera del campo de individuos. Si a la pareja ordenada α, β le está coordinado el elemento δ y a la pareja ordenada β, γ le está coordinado el elemento $\varkappa$, entonces a la pareja ordenada δ, γ le está coordinado el mismo elemento que a la pareja ordenada $\alpha, \varkappa$.

3. Existe un elemento ε tal que el elemento α está coordinado, tanto a cada pareja ordenada ε, α, como a cada pareja ordenada α, ε.

4. Para cada elemento α del campo de individuos existe un elemento β tal que a la pareja ordenada α, β está coordinado un elemento ε del tipo mencionado en 3.

Para la formulación simbólica necesitamos un predicado triádico, Φ, tal que $\Phi\,\alpha\,\beta\,\gamma$ tenga el significado: γ está coordinado a la pareja ordenada α, β. Los axiomas se escriben entonces:

1. $\forall x\, y\, \exists z\,(\Phi\, x\, y\, z \wedge \forall u\,(\Phi\, x\, y\, u \to z = u))$.
2. $\forall x\, y\, z\, u\, v\, w\,(\Phi\, x\, y\, u \wedge \Phi\, y\, z\, v \wedge \Phi\, u\, z\, w \to \Phi\, x\, v\, w)$.
3. (para 3. y 4.) $\exists x\,(\forall y\,(\Phi\, x\, y\, y \wedge \Phi\, y\, x\, y) \wedge \forall y\, \exists z\, \Phi\, y\, z\, x)$.

Con esta formulación de los axiomas no se hace uso de ningún símbolo para individuos determinados. Puesto que

$$\forall x\, y\, \exists z\,(\Phi\, x\, y\, z \wedge \forall u\,(\Phi\, x\, y\, u \to z = u)) \to \forall x\, y\, \exists z\, \Phi\, x\, y\, z$$

y

$$\forall x\, y\, \exists z\,(\Phi\, x\, y\, z \wedge \forall u\,(\Phi\, x\, y\, u \to z = u)) \to \forall x\, y\, z\, u\,(\Phi\, x\, y\, z \wedge \Phi\, x\, y\, u \to \to z = u)$$

pueden demostrarse a partir de las fórmulas elementales puramente lógicas apoyándose en las reglas (a) a (d), de acuerdo con la regla de separación se obtienen las fórmulas unitarias $\forall x\, y\, \exists z\, \Phi\, x\, y\, z$ y $\forall x\, y\, z\, u\,(\Phi\, x\, y\, z \wedge \Phi\, x\, y\, u \to z = u)$: podemos, por tanto, introducir un signo φ de función para una función diádica, y adjuntar $\forall x\, y\, \Phi\, x\, y\, \varphi\,(x, y)$ como nueva fórmula elemental. A partir del axioma 2. obtenemos, suprimiendo primero los signos universales y luego aplicando la regla de reemplazamiento de variables individuales, que también aquí es válida: $\Phi\, x\, y\, \varphi\,(x, y) \wedge \Phi\, y\, z\, \varphi\,(y, z) \wedge \Phi\, \varphi\,(x, y)\, z\, \varphi\,(\varphi\,(x, y), z) \to \Phi\, x\, \varphi\,(y, z)\, \varphi\,(\varphi\,(x, y), z)$. Como además $\Phi\, x\, y\, \varphi\,(x, y)$, $\Phi\, y\, z\, \varphi\,(y, z)$ y $\Phi\, \varphi\,(x, y)\ z\, \varphi\,(\varphi\,(x, y), z)$ pueden demostrarse, por la regla de separación se obtiene $\Phi\, x\, \varphi\,(y, z)\, \varphi\,(\varphi\,(x, y), z)$; por ser demostrable $\Phi\, x\, \varphi\,(y, z)\, \varphi\,(x, \varphi\,(y, z))$, y debido a la univocidad de Φ, se llega a $\varphi\,(\varphi\,(x, y), z) = \varphi\,(x, \varphi\,(y, z))$, forma sencilla a que ha pasado ahora el axioma 2.

De modo análogo, el tercer axioma es posible pasarlo a la forma $\exists x\,(\forall y\,(\varphi\,(x, y) = y \wedge \varphi\,(y, x) = y) \wedge \forall y\, \exists z\,(\varphi\,(y, z) = x))$. Por tanto, $\exists x\, \forall y\,(\varphi\,(x, y) = y \wedge \varphi\,(y, x) = y)$ es demostrable. Además, se puede demostrar $\forall y\,(\varphi\,(x, y) = y \wedge \varphi\,(y, x) = y) \wedge \forall y\,(\varphi\,(z, y) = y \wedge \varphi\,(y, z) = y) \to \to \varphi\,(x, z) = z \wedge \varphi\,(x, z) = x$ y con ella también $\forall y\,(\varphi\,(x, y) = y \wedge \varphi\,(y, x) = y) \wedge \wedge \forall y\,(\varphi\,(z, y) = y \wedge \varphi\,(y, z) = y) \to x = z$; de este modo tenemos dos nuevas fórmulas unitarias. Podemos también introducir un elemento ε (el llamado elemento unidad), y con él la fórmula elemental correspondiente $\forall y\,(\varphi\,(\varepsilon, y) = y \wedge \varphi\,(y, \varepsilon) = y)$. Además podemos escribir la segunda parte del axioma 3. en la forma $\forall y\, \exists z\, \varphi\,(y, z) = \varepsilon$.

Por tanto, los tres axiomas pueden sustituirse por las fórmulas

$$\varphi\,(\varphi\,(x, y), z) = \varphi\,(x, \varphi\,(y, z)),$$
$$\varphi\,(\varepsilon, y) = y \wedge \varphi\,(y, \varepsilon) = y,$$
$$\exists z\, \varphi\,(y, z) = \varepsilon$$

a partir de las cuales cabe deducir del modo usual los teoremas de la teoría de grupos, por ejemplo el teorema que se expresa con la fórmula $\varphi(x, y) = \varepsilon \rightarrow \varphi(y, x) = \varepsilon$. También se encuentran otras fórmulas unitarias, tales como $\forall x \exists y \varphi(x, y) = \varepsilon$ y $\forall x y z (\varphi(x, y) = \varepsilon \wedge \varphi(x, z) = \varepsilon \rightarrow y = z)$, de modo que es posible introducir un nuevo signo de función, ψ, con la fórmula elemental característica $\forall x \varphi(x, \psi x) = \varepsilon$ (en la teoría de grupos, a ψx se le llama el elemento inverso de x).

Por principio, con la introducción de ι —digamos de los símbolos de individuos y de funciones— se obtiene una formulación de los teoremas más breve y concisa, pero no se expresan al hacerlo relaciones lógicas fundamentalmente nuevas: todos los teoremas que es posible transcribir con ayuda de los nuevos símbolos pueden asimismo expresarse sin ellos. Una fórmula $\mathfrak{B}(\alpha)$ que contenga una α definida por medio de $\mathfrak{A}(x)$, puede también presentarse con idéntico sentido sin α (escribiendo $\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}(x)$, en caso de que la variable x no aparezca en ninguna otra parte). En una fórmula que contenga un signo φ de función, definido mediante $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n, y)$, cada fórmula primaria

$$\mathfrak{A}(\varphi(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi(g_1, \ldots, g_n))$$

puede sustituirse por

$$\forall y \ldots \forall u (\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n, y) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}(g_1, \ldots, g_n, u) \rightarrow \mathfrak{A}(y, \ldots, u))$$

en caso de que las variables $y, \ldots, u$ no estén presentes en ningún otro sitio; en este último caso, sin embargo, el proceso se ha de reiterar posiblemente varias veces, ya que las $a_1, \ldots, a_n$ pueden contener también φ. Análogamente ocurre con la ι introducida: por ejemplo, la fórmula mencionada más arriba, $\varphi(x, y) = \varepsilon \rightarrow \varphi(y, x) = \varepsilon$, puede sustituirse primeramente por $\forall u (\Phi z u u \wedge \wedge \Phi u z u) \rightarrow (\varphi(x, y) = z \rightarrow \varphi(y, x) = z)$ y después por $\forall u (\Phi z u u \wedge \wedge \Phi u z u) \rightarrow \forall v w (\Phi x y v \wedge \Phi y x w \rightarrow (v = z \rightarrow w = z))$. Esta última fórmula expresa lo mismo que $\varphi(x, y) = \varepsilon \rightarrow \varphi(y, x) = \varepsilon$, y puede demostrarse a partir de los axiomas sin que para ello haya que introducir nuevos símbolos.

No podemos llevar a cabo aquí la demostración de la posibilidad de eliminar los símbolos individuales, las funciones y las ι. Para ello se requeriría lo siguiente: en caso de tratarse de un proceso deductivo en que aparecieran los símbolos mencionados, sería necesario en primer término coordinar unívocamente a cada fórmula del proceso una fórmula libre de tales símbolos (esta fórmula coordinada sería la misma fórmula original en el caso de que en ella no apareciese ninguno de estos símbolos); además habría que mostrar que la articulación demostrada se conservaba, es decir, que cada fórmula transformada del proceso deductivo era deductible de los axiomas exclusivamente con los medios del § 10.

D. HILBERT y P. BERNAYS [11, § 8] han dado la demostración de la eliminabilidad de la ι y símbolos anejos en el caso de un sistema de axiomas de la teoría de números, y K. SCHÜTTE [27] para un sistema de axiomas del Análisis; compárese asimismo K. SCHRÖTER [23].

Ejercicios del capítulo tercero

1. Resuélvanse las cuestiones 1. a 4. de los Ejercicios correspondientes al capítulo II utilizando, en lugar del cálculo de clases, el cálculo de predicados monádicos.

2. Obsérvense los axiomas *a*) . . . *i*) que se dan a continuación, referentes a las relaciones biológicas de parentesco entre los seres humanos (vivos actualmente o que hayan vivido).

a) Si un ser humano es del sexo masculino no es del sexo femenino.

b) Si un ser humano no es del sexo masculino es del sexo femenino.

c) Quien es padre de un ser humano es del sexo masculino.

d) Quien es madre de un ser humano es del sexo femenino.

e) Todo ser humano tiene exactamente una madre y exactamente un padre.

f) Si un ser humano es padre de otro, es antepasado suyo.

g) Si un ser humano es madre de otro, es antepasado suyo.

h) Nadie es antepasado de sí mismo.

i) Si un ser humano es antepasado de otro y éste es a su vez antepasado de un tercero, el primer ser humano es también antepasado del tercero.

α) Formúlense los axiomas simbólicamente, para lo cual han de referirse las variables individuales $x, y, z, \ldots$ a los seres humanos y han de introducirse predicados monádicos para «ser de sexo masculino» y «ser de sexo femenino», y predicados diádicos para «padre de», «madre de» y «antepasado de».

β) ¿Cómo se expresan, por medio de los predicados fundamentales, los enunciados siguientes: «*x* es hermana de *y*», «*x* es hermano de *y*», «*x* e *y* son hermanos», «*x* es abuelo materno de *y*» y «*x* es abuelo paterno de *y*»?

γ) Dedúzcase de los axiomas el teorema «los hermanos (no hermanastros) de la madre de un ser humano no son hermanos de este ser humano»: y ello por dos procedimientos:

γ 1) Coordínese a este teorema, siguiendo el camino del comienzo del § 9, una expresión del cálculo de predicados, e inténtese demostrar su validez general en el sistema de axiomas del mismo §.

γ 2) Extráigase el teorema directamente de los axiomas por medio del proceso dado en el § 10 [20].

---

[20] Final de la pág. 130 y pág. 131.

3. Formúlese el siguiente sistema de axiomas de BERNAYS para la teoría de conjuntos [P. BERNAYS, *Journal of Symbolic Logic*, Parte I, tomo 2 (1937), págs. 65-77; Parte II, tomo 6 (1941), págs. 1-17], que es de primer grado (!), en el cálculo de predicados. (Observación: se ha modificado la formulación bernaysiana en pequeños detalles, con objeto de facilitar su formalización.)

Los axiomas rezan como sigue, con la numeración bernaysiana:

I, 1. Si un conjunto a tiene los mismos elementos que el conjunto b, a es idéntico a b.

I, 2. Si la clase A tiene los mismos elementos que la clase B, A es idéntica a B.

II, 1. Existe un conjunto que no tiene ningún elemento.

II, 2. Dados dos conjuntos a y b, existe un conjunto c tal que para todo x, «x es un elemento de c» es sinónimo de «x es un elemento de a o x es igual a b».

III, a (1). Dado cualquier conjunto a, existe una clase B tal que a es el único elemento de B.

III, a (2). Dada cualquier clase A, existe una clase B tal que un conjunto es un elemento de B siempre y únicamente cuando no es un elemento de A.

III, b (1). Existe una clase cuyos elementos son aquellos conjuntos que contienen exactamente un elemento.

DEFINICIÓN. Decimos que un conjunto c es de la forma $\langle a, b\rangle$ cuando solamente puedan ser elementos de c los conjuntos que tengan como único elemento a a y los conjuntos que contengan como dos únicos elementos a a y b. Una clase o conjunto que tiene exclusivamente elementos de la forma $\langle a, b\rangle$ se llama clase o conjunto de parejas.

III, b (2). Existe una clase cuyos elementos son solamente los conjuntos de la forma $\langle a, b\rangle$, en los que a es un elemento de b.

III, b (3). Dada cualquier clase A existe una clase B cuyos elementos son aquellos conjuntos de la forma $\langle a, b\rangle$ para los que a es un elemento de A.

III, c (1). Dada una clase de parejas cualquiera, A, existe una clase B cuyos elementos son los conjuntos a para los cuales existe un conjunto b tal que A tiene la forma $\langle a, b\rangle$.

III, c (2). Dada una clase de parejas cualquiera, A, existe una clase B cuyos elementos son solamente conjuntos de la forma $\langle a, b\rangle$, siendo $\langle b, a\rangle$ un elemento de A.

III, c (3). Sea A una clase de parejas tal que para cada elemento de A de la forma $\langle a, d\rangle$, d tenga la forma $\langle b, c\rangle$. Existe entonces una clase de parejas, B, con la siguiente propiedad: para cada elemento de B de la forma

$\langle d, c\rangle$, d tiene la forma $\langle a, b\rangle$, y existe un elemento $\langle a, e\rangle$ de A tal que e tiene la forma $\langle b, c\rangle$.

DEFINICIÓN. Una función es una clase de parejas, A, tal que no existen dos elementos de A de las formas $\langle a, b\rangle$ y $\langle a, c\rangle$ con diferentes b y c.

DEFINICIÓN. Una clase A se llama subclase de la clase B cuando todo elemento de A es también elemento de B; un conjunto a se llama subconjunto de un conjunto b en el caso correspondiente.

IV. Dada una clase de parejas cualquiera, A, existe una clase B tal que B es una función y una subclase de A, y que para cada elemento de A de la forma $\langle a, b\rangle$ existe también un elemento de B de la forma $\langle a, c\rangle$.

V a. Si dada una clase A existe un conjunto b tal que A y b tienen los mismos elementos, para cada subclase de A existe un conjunto con los mismos elementos.

V b. Si una clase A y la clase correspondiente B que existe según III, c (2) son funciones; y si además existe un conjunto con exactamente los mismos elementos que la clase que existe según III, c (1) por existir A, entonces también ocurre lo mismo con la clase que existe según III, c (1) por existir B.

V c. Dado un conjunto cualquiera a existe un conjunto b cuyos elementos son conjuntos que son elementos, al menos, de un elemento de a.

V d. Dado un conjunto cualquiera a existe un conjunto b cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de a.

VI. Existe una clase A tal que A y la clase B correspondiente a ella según III, c (2) son funciones. Existe además un conjunto c que tiene exactamente los mismos elementos que la clase correspondiente a A por III, c (1). La clase correspondiente a B según III, c (1) tiene solamente elementos que son también elementos de c, mientras que c tiene al menos un elemento más.

VII. No existe ninguna clase no vacía, A, para la cual cada elemento de A tenga a su vez un elemento que sea elemento de A.

α) Formúlese el sistema de axiomas como sistema doble, para lo cual se introducirán variables individuales diferentes para conjuntos y para clases. Como predicado fundamental ha de incluirse, además de la identidad, el predicado diádico «es un elemento de», en el cual solamente los conjuntos pueden ser elementos de conjuntos o de clases. Para el predicado triádico «x es de la forma $\langle a, b\rangle$», para los predicados monádicos «ser una clase de parejas» y «ser una función» y para los predicados diádicos «subclase de» y «subconjunto de» deben introducirse signos especiales de predicados que equivalgan a abreviaciones de ciertos predicados compuestos a partir de los predicados fundamentales.

β) Formúlese el sistema de axiomas como sistema simple, con cuyo objeto se introducirá un campo unitario de individuos, compuesto por los

conjuntos y las clases, y luego dos predicados monádicos «ser un conjunto» y «ser una clase»; en lo restante se procederá análogamente a como en α).

Es suficiente asimismo la introducción del predicado fundamental único «ser un conjunto» en lugar de los dos predicados «ser un conjunto» y «ser una clase»: el campo de individuos consiste en clases, y los conjuntos son clases especiales; los conjuntos y las clases con los mismos elementos exactamente, se considerarán como idénticos. Con ello se simplifica el sistema de axiomas; por ejemplo, en lugar de los axiomas I, 1 y I, 2 se tiene un solo axioma.

CAPÍTULO IV

EL CALCULO GENERALIZADO DE PREDICADOS

§ 1. Generalización del cálculo de predicados mediante adopción de cuantificadores para las variables predicado

No cabe duda de que el formalismo, tanto el del cálculo de proposiciones como el del cálculo de clases y el del cálculo de predicados, no está acabado y cerrado en sí mismo. Podemos, pues, expresar (ya que interpretamos las expresiones como siendo universalmente válidas) que, para todos los valores de las variables predicado que entran en ella, una expresión representa una proposición verdadera. Pero no somos capaces de expresar la aserción contraria a ésta [1], ya que la expresión, al ser negada formalmente, quiere decir otra cosa: a saber, que la expresión representa una proposición falsa para todos los valores de las variables predicado que en ella aparecen. Sin embargo, existen expresiones que no tienen validez universal, y cuya negación tampoco es universalmente válida. Tampoco podemos poner de manifiesto que de la validez de una expresión en cualquier campo se sigue la de otra expresión. Con objeto de expresar esto necesitamos cuantificadores para las variables predicado.

La generalización natural que se presenta de los cálculos mencionados es la de considerar las variables proposicionales, variables de clases y variables predicado que se encontraban en las expresiones estudiadas hasta ahora como variables libres, e introducir junto a ellas variables ligadas de diferentes clases —ligadas por medio de cuantificadores—. Ahora bien, la introducción de variables proposicionales ligadas, aun cuando, naturalmente, es posible, no da lugar a nada especialmente interesante; además puede eludirse la introducción de variables de clases ligadas, puesto que es posible utilizar el cálculo con predicados monádicos en lugar del cálculo de clases. *Por tanto, la gene-*

[1] Es decir, no podemos expresar que *no* para todos los valores de las variables predicado que entran en la expresión dada representa ésta una proposición verdadadera. (*N. del T.*)

realización más importante consiste en introducir ahora variables predicado ligadas por medio de cuantificadores. Si $\mathfrak{A}(F)$ es una expresión que contiene la variable predicado libre F, $\exists F\,\mathfrak{A}(F)$ significa que existe un predicado con la propiedad $\mathfrak{A}(F)$, y $\forall F\,\mathfrak{A}(F)$ quiere decir que todos los F tienen la propiedad $\mathfrak{A}(F)$. Si, por tanto, $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ es una expresión con las variables predicado libres $F_1, \ldots, F_r$ y ninguna variable individual libre, la verdad de $\neg \forall F_1 \ldots F_r\,\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ en un campo de individuos significa que $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ no es válida en este campo. Si $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ y $\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_r)$ son dos expresiones de este tipo, la verdad de $\forall F_1 \ldots F_r\,\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r) \rightarrow \rightarrow \forall F_1 \ldots F_r\,\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_r)$ en un campo de individuos significa que, en tal campo, la validez de $\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_r)$ se sigue de la de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$. Lo único que puede decirse, tomadas las cosas rigurosamente, de una expresión que no contiene variables libres de ninguna clase, es que es verdadera o falsa en el campo de individuos del caso; pero utilizaremos la palabra «válida» en el mismo sentido que «verdadadera», y análogamente ha de entenderse para «universalmente válida». Llamaremos además cumplible en un campo de individuos a una de estas expresiones cuando sea verdadera en tal campo, y cumplible simplemente cuando sea en general verdadera en algún campo no vacío. Con esta terminología la validez universal de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ y la de $\forall F_1 \ldots F_r\,\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ tienen el mismo significado.

Para emprender una construcción exacta de este cálculo, hemos de generalizar por lo pronto el concepto de expresión del capítulo III, § 3. En la construcción de expresiones volveremos a emplear los mismos signos (a saber, caracteres latinos mayúsculos, provistos eventualmente de subíndices) para todos los géneros de variables predicado; y ante cualquier demostración simbólica señalaremos qué variables predicado serán monádicas, cuáles diádicas, etc. Pero ahora no es precisa una especificación explícita de esta índole —en que podría pensarse en otro caso—, ya que el modo de llenar los lugares vacíos de las variables predicado indica su carácter, y las distingue, por lo demás, de las variables proposicionales.

Las reglas modificadas para la construcción de expresiones dicen ahora:

1. Las variables proposicionales son expresiones.

2. Las variables predicado n-ádicas tras de las cuales se encuentran n variables individuales, son expresiones.

Llamamos fórmulas primarias a las expresiones que responden a 1. o a 2. Las variables individuales o las predicado que aparecen en las fórmulas primarias se encuentran en forma libre.

3. Si $\mathfrak{A}$ es una expresión también lo es $\neg \mathfrak{A}$ (en $\neg \mathfrak{A}$ las variables están libres o ligadas del mismo modo que en $\mathfrak{A}$).

4. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son expresiones tales que ninguna variable aparezca en una de ellas en forma libre y en la otra en forma ligada, también son expresiones $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$. Cada variable aparece en estas expresio-

nes en forma libre o ligada cuando se encuentra en esta misma forma en una de las expresiones $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$.

5. Sea $\mathfrak{A}$ una expresión en la que aparezca la variable x —o bien la variable F— en forma libre; entonces también serán expresiones $\forall x \mathfrak{A}$ y $\exists x \mathfrak{A}$ —o, respectivamente, $\forall F \mathfrak{A}$ y $\exists F \mathfrak{A}$— en las cuales se dice que la variable x —o F, en su caso— está ligada. Las demás variables que aparezcan tendrán el mismo carácter, de libres o de ligadas, que tenían en $\mathfrak{A}$. (Análogamente ocurre cuando en lugar de x o de F se emplean otras variables.)

El aumento de capacidad de expresión del lenguaje simbólico se muestra en el hecho de que ahora podemos retrotraer la *identidad,* por medio de definiciones, a las demás relaciones elementales: para ello basta aclarar que x será idéntico a y cuando cualquier predicado monádico que convenga a x convenga también a y; por tanto, podemos considerar «$x = y$» como una abreviación de «$\forall F (F x \rightarrow F y)$». El problema de la decidibilidad del cálculo restringido de predicados en sus dos versiones, es decir, el problema de la validez universal y de la cumplibilidad, puede formularse ahora de tal modo que la expresión de que se trate no contenga ya variable predicado alguna libre: la validez universal de una fórmula «$\exists x \forall y (F x x \vee \neg F x y \vee G x y)$» es equivalente a la validez universal (o sea a su verdad en todo campo) de «$\forall F G \exists x \forall y (F x x \vee \neg F x y \vee G x y)$», así como la validez de la primera fórmula en cualquier campo es equivalente a la verdad de la segunda en el mismo campo; la cumplibilidad de la primera fórmula (en general o en un campo cualquiera) es equivalente a la cumplibilidad de «$\exists F G \exists x \forall y (F x x \vee \vee \neg F x y \vee G x y)$», (en general o en el mismo campo).

Otro problema que encuentra aquí por primera vez su formulación simbólica es el llamado *problema de la eliminación.* Hemos de entender por este problema lo siguiente: sea $\forall F \mathfrak{A} (F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$ una expresión de nuestro cálculo generalizado que contenga como únicas variables libres $G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k$, y que carezca de variable predicado ligada alguna fuera de F; decimos que la variable F puede eliminarse de esta expresión si es posible dar una expresión $\mathfrak{B} (G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$ que contenga las variables libres $G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k$ y ninguna variable predicado ligada, y tal que

$$\forall F \mathfrak{A} (F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \mathfrak{B} (G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

sea universalmente válida. Análogamente ocurre en caso de que se tenga

$$\exists F \mathfrak{A} (F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \text{ en lugar de } \forall F \mathfrak{A} (F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k).$$

Por lo demás, bastará resolver los problemas para una de las formas, ya que la validez universal de

$$\forall F \mathfrak{A} (F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \mathfrak{B} (G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k)$$

quiere decir lo mismo que la de

$$\exists F \urcorner \mathfrak{A}(F, G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \urcorner \mathfrak{B}(G_1, \ldots, G_m, x_1, \ldots, x_k).$$

Como es natural, no se puede pensar en una solución general del problema de la eliminación, ya que tal cosa tendría como consecuencia la resolución del problema de la decidibilidad en el cálculo restringido de predicados: pues si se tratase de investigar la validez universal de una expresión $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$, o sea de $\forall F_1 \ldots F_r \mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$, ocurriría que, si se diera una expresión $\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_{r-1})$ equivalente a $\forall F_r \mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$, la validez universal de $\mathfrak{A}(F_1, \ldots, F_r)$ sería equivalente a la de $\mathfrak{B}(F_1, \ldots, F_{r-1})$, y sería posible ir reduciendo progresivamente el número de variables predicado hasta que finalmente quedaría una expresión que no contendría ya ninguna variable predicado; expresión que, por tanto, estaría construida únicamente con la identidad (que hemos de considerar aquí como predicado elemental), en caso de que no pasase directamente a uno de los dos valores «$\vee$» o «$\wedge$».

Ahora bien, pueden darse fórmulas para las cuales no solamente no se conoce el resultado de la eliminación, sino que se ha probado que no existe tal resultado (cf. W. ACKERMANN [1] y [2]); por el contrario, con fórmulas de estructura especial se consigue llevar a cabo la eliminación (en E. SCHRÖDER [12] se encuentran numerosos detalles acerca de esta cuestión). Además, la eliminación se logra completamente cuando aparecen únicamente variables predicado monádicas: en esto se apoya un proceso para solventar la decidibilidad aplicable a la parte del cálculo generalizado que incluye únicamente variables predicado monádicas, proceso descubierto por L. LÖWENHEIM [10], TH. SKOLEM [13] y H. BEHMANN [3] y que, naturalmente, alcanza mucho más lejos que el proceso correspondiente en el cálculo restringido de predicados con variables predicados monádicas, ya que comprende expresiones en las que se encuentran mezclados signos de existencia y universales para los predicados.

Si preguntamos ahora por un *sistema axiomático* para las fórmulas universalmente válidas del cálculo generalizado mediante inclusión de cuantificadores para las variables predicados, hay que advertir que en las explicaciones del § 10 del capítulo III se halla contenido tal sistema: se trata de un sistema múltiple de axiomas, en el cual entran junto a las variables individuales variables predicado de diferentes géneros, las cuales se manejan como si fuesen variables individuales de clases distintas; volvemos a tomar ahora exclusivamente «$\vee$» y «$\urcorner$» como conexiones proposicionales básicas, y —tal como habíamos hecho antes— consideramos «$\wedge$», «$\rightarrow$» y «$\leftrightarrow$» como abreviaciones de aquéllas; $\forall x \mathfrak{A}(x)$ y $\forall F \mathfrak{A}(F)$ serán, respectivamente, abreviaciones de $\urcorner \exists x \urcorner \mathfrak{A}(x)$ y $\urcorner \exists F \urcorner \mathfrak{A}(F)$.

En cuanto a *fórmulas elementales*, tenemos por lo pronto aquéllas que habíamos llamado en el § 10 fórmulas elementales lógicas; así pues, serán

fórmulas elementales todas las disyunciones en que aparezcan miembros disyuntivos que tengan las formas $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ o $\exists F\, \mathfrak{A}(F)$ o que sean fórmulas primarias negadas o no negadas, y aquellas disyunciones que representen una tautología. Las *reglas de deducción* (a) y (b) y la regla de separación permanecen invariables; lo mismo ocurre con la regla (c), con la única diferencia de que ahora las variables características pueden ser también variables predicado; por el contrario, la regla (d), además de su forma primitiva tiene una forma generalizada en caso de que las variables características sean variables predicado; entonces dice así:

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \exists F\, \mathfrak{A}(F) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \exists F\, \mathfrak{A}(F) \vee \mathfrak{N}}.$$

En esta fórmula, $\mathfrak{A}(F)$ es una expresión que contiene la variable libre F, y $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ procede de $\mathfrak{A}(F)$ por reemplazamiento de la variable predicado F (cf. la formulación exacta de tal reemplazamiento en el § 5 del capítulo III); en lo que se refiere a $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ existen las mismas condiciones a satisfacer que antes. En un sistema múltiple de axiomas se introducían anteriormente fórmulas elementales suplementarias que representaban los axiomas específicos del campo de que se tratara; también en este caso tenemos las fórmulas elementales correspondientes: infinitas fórmulas elementales de un número finito de tipos diferentes, de modo que habrá que llamar al sistema, de acuerdo con la terminología del capítulo III, § 10, un sistema axiomático de segundo grado. Aquí aparece la regla de separación como otra regla más.

Las fórmulas elementales adicionales son las siguientes:

α) Sea $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y)$ una expresión que contenga las variables individuales libres $x_1, \ldots, x_n, y$; entonces,

$$\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow \exists F\, [\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, (F x_1 \ldots x_n y \wedge \wedge \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y)) \wedge \forall x_1 \ldots x_n y z\, (F x_1 \ldots x_n y \wedge F x_1 \ldots x_n z \rightarrow y = z)]$$

es una fórmula elemental —en la que hay que tomar «$y = z$» por una abreviación de «$\forall G\, (G y \rightarrow G z)$».

El sentido de este axioma es el siguiente: en caso de que una expresión $\forall x_1 \ldots x_n \exists y\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y)$ sea verdadera, a cada acervo-n, $x_1, \ldots, x_n$, están coordinados ciertos valores de y mediante la propiedad $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y)$; es posible, por tanto, dar forma unívoca a esta coordinación por medio de un predicado $n + 1$-ádico apropiado —para lo cual se escoge, para cada acervo-n, $x_1, \ldots, x_n$, uno de los valores de y coordinados a él. Este axioma corresponde al de elección de la teoría de conjuntos.

β) Sea $\mathfrak{A}(x, F)$ una expresión que contenga la variable individual libre x y la variable predicado libre F (que podrá tener n lugares vacíos). $\mathfrak{A}'(x, G)$ procede de $\mathfrak{A}(x, F)$ por sustitución en esta última expresión de toda fórmula

primaria $F\,\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ por $G\,x\,\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ (siendo G una variable predicado con $n + 1$ lugares vacíos); entonces,

$$\forall x \exists F \mathfrak{A}(x, F) \rightarrow \exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G)$$

será una fórmula elemental.

También aquí se trata de una aplicación del axioma de elección de la teoría de conjuntos; pues si para todo x existe al menos un predicado n-ádico Φ tal que ocurra $\mathfrak{A}(x, \Phi)$, podemos escoger para cada x uno de estos Φ, que llamaremos Φ^x; si definimos ahora un predicado $n + 1$-ádico, Ψ, por medio de la fórmula

$$\forall x\, y_1 \ldots y_n (\Psi x\, y_1 \ldots y_n \leftrightarrow \Phi^x y_1 \ldots y_n),$$

no cabe duda de que ocurrirá $\mathfrak{A}'(x, \Psi)$.

Demos ahora algunos procesos deductivos. Hemos mencionado ya que interpretamos aquí «$x = y$» como forma abreviada de escribir «$\forall F(Fx \rightarrow Fy)$»; deduzcamos ahora dos fórmulas para la identidad.

1. $x = x$, es decir, $\forall F(Fx \rightarrow Fx)$, o bien $\neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fx)$.

DEMOSTRACIÓN. $\neg Fx \vee Fx$ [fórmula elemental]; $\neg \neg (\neg Fx \vee Fx)$ [regla (a)]; $\neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fx)$ [regla (c)].

2. $x = y \rightarrow y = x$, es decir, $\neg \forall F(Fx \rightarrow Fy) \vee \forall F(Fy \rightarrow Fx)$ o bien $\neg \neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg \exists F \neg (\neg Fy \vee Fx)$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg Gx \vee \neg Gy \vee Gx$ [fórmula elemental];

$\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg \neg \neg Gx \vee \neg Gy \vee Gx$ [según la regla (a)];
$\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee Gy \vee \neg Gy \vee Gx$ [fórmula elemental];
$\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg \neg Gy \vee \neg Gy \vee Gx$ [según la regla (a)];
$\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg (\neg \neg Gx \vee \neg Gy) \vee \neg Gy \vee Gx$ [según la regla (b)];
$\exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg Gy \vee Gx$ [según la regla (d) generalizada];
$\neg \neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg Gy \vee Gx$ [según la regla (a)];
$\neg \neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg \neg (\neg Gy \vee Gx)$ [según la regla (a)];
$\neg \neg \exists F \neg (\neg Fx \vee Fy) \vee \neg \exists F \neg (\neg Fy \vee Fx)$ [según la regla (c)].

3. Como tercer ejemplo vamos a demostrar la fórmula

$$\exists F \forall x ((Gx \vee Fx) \wedge (Hx \vee \neg Fx)) \leftrightarrow \forall x (Gx \vee Hx),$$

que contiene un resultado fundamental de la eliminación [abreviaremos $\exists F \forall x ((Gx \vee Fx) \wedge (Hx \vee \neg Fx))$ designándola por $\mathfrak{A}$, y $\forall x (Gx \vee Hx)$ llamándola $\mathfrak{B}$].

I. Deducimos $\neg \mathfrak{B} \vee Gy \vee Hy$.

DEMOSTRACIÓN. $\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg (G y \vee H y) \vee G y \vee H y$ es una tautología, que puede deducirse de las fórmulas elementales tautológicas aplicando exclusivamente las reglas (a) y (b).

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee G y \vee H y$ [según la regla (d)];

$\neg \neg \exists x \neg (G x \vee H x) \vee G y \vee H y$ [según la regla (a)], o sea $\neg \mathfrak{B} \vee \vee G y \vee H y$.

II. Proceso deductivo de $\neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}$.

Es fácil demostrar esta fórmula de un modo sencillo a partir de las fórmulas elementales tautológicas y apoyándose en las reglas (a) ... (d), pero sin necesidad de utilizar la regla (d) generalizada (cf. la demostración del teorema X del capítulo III, § 5).

III. Proceso deductivo de $\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

Se puede, en primer término, deducir la tautología

$$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg G y \vee \mathfrak{A} \vee ((G y \vee \neg G y) \wedge (H y \vee \neg \neg G y))$$

a partir de las fórmulas elementales tautológicas con la sola ayuda de las reglas (a) y (b).

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg G y \vee \mathfrak{A} \vee \neg \neg ((G y \vee \neg G y) \wedge (H y \vee \neg \neg G y))$ [regla (a)];

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg G y \vee \mathfrak{A} \vee \neg \exists x \neg ((G y \vee \neg G y) \wedge (H y \vee \neg \neg G y))$ [según la regla (c)];

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg G y \vee \mathfrak{A}$ [según la regla (d) generalizada].

De manera análoga se extrae

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg H y \vee \mathfrak{A}$

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \neg (G y \vee H y) \vee \mathfrak{A}$ [regla (b)]

$\exists x \neg (G x \vee H x) \vee \mathfrak{A}$ [regla (d)]

$\neg \neg \exists x \neg (G x \vee H x) \vee \mathfrak{A}$ [según la regla (a)], o sea $\neg \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

IV. Deducción de $\neg \mathfrak{A} \vee G y \vee H y$.

$\exists x \neg ((G x \vee F x) \wedge (H x \vee \neg F x)) \vee \neg ((G y \vee F y) \wedge (H y \vee \neg F y)) \vee G y \vee H y$ puede deducirse a partir de las fórmulas elementales tautológicas por medio únicamente de las reglas (a) y (b).

$\exists x \neg ((G x \vee F x) \wedge (H x \vee \neg F x)) \vee G y \vee H y$ [regla (d)]

$\neg \neg \exists x \neg ((G x \vee F x) \wedge (H x \vee \neg F x)) \vee G y \vee H y$ [regla (a)]

$\neg \exists F \forall x ((G x \vee F x) \wedge (H x \vee \neg F x)) \vee G y \vee H y$ [regla (c)], es decir, $\neg \mathfrak{A} \vee G y \vee H y$.

$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{A}$ [de II y III, según la regla (b)]

$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \neg \neg \mathfrak{A}$ [según la regla (a)]

$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee G y \vee H y$ [de I y IV, según la regla (b)]

$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \neg \neg (G y \vee H y)$ [según la regla (a)]

$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \neg \exists x \neg (G x \vee H x)$ [según la regla (c)], o sea $\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{B}$.
$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \neg \neg \mathfrak{B}$ [según la regla (a)]
$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \neg (\neg \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{B})$ [según la regla (b)], es decir, $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$.
Pero ésta era la tesis.

Si preguntamos ahora si el sistema es *completo* —en el sentido de ser deductibles todas las expresiones universalmente válidas— es menester responder negativamente. *No existe aquí, en modo alguno, ningún sistema de axiomas completo, en oposición a lo que ocurría en el cálculo restringido de predicados.* Todavía más: según ha mostrado K. GÖDEL [7], para cada sistema de axiomas que se establezca se pueden señalar expresiones universalmente válidas no deductibles, pero sin que sea posible caracterizar las expresiones no deductibles de tal modo que al adoptarlas como nuevos axiomas o como esquemas axiomáticos convirtieran el sistema en completo (no podemos presentar en el marco del presente libro estos importantes desarrollos gödelianos). En todo caso, nuestro sistema de axiomas basta para todos los fines corrientes.

Teniendo en cuenta el modo como hemos construido el sistema de axiomas, se sigue que los resultados que habíamos deducido anteriormente para el cálculo restringido de predicados pueden traducirse analógicamente —aunque aquí no podemos ocuparnos de ello más detalladamente. Por ejemplo, siguen siendo válidos los teoremas sobre la forma normal prenexuada, sobre la regla de sustitución, acerca del principio de dualidad, los concernientes a la formación de la expresión opuesta de una dada y los teoremas del § 5 del capítulo III. Pero es posible ahora hacer más estricto el teorema sobre la forma normal prenexuada, y ello de diversos modos: de modo semejante a como, en el cálculo restringido de predicados, el teorema sobre la forma normal skolemiana y otros teoremas de reducción son asimismo más estrictos que aquél; tales teoremas estrictos correspondientes han sido presentados por A. A. ZYKOV [17], y dicen lo siguiente:

TEOREMA I. Para cada expresión $\mathfrak{A}$ de nuestro cálculo que no contenga ninguna variable libre puede darse una expresión $\mathfrak{B}$, con esta misma característica, tal que $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ sea universalmente válida y que $\mathfrak{B}$ posea la siguiente propiedad: no solamente tiene $\mathfrak{B}$ la forma normal prenexuada, sino que en el prefijo de $\mathfrak{B}$ todos los cuantificadores de los predicados anteceden a los cuantificadores de los individuos.

Indicaremos sólo brevemente su demostración. Podemos suponer que $\mathfrak{A}$ se encuentra en la forma normal prenexuada. Nos encontramos ahora con que, en el caso de que (en el prefijo de $\mathfrak{A}$) un cuantificador de predicado siga inmediatamente a un cuantificador de individuo, será posible permutar ambos, pero para hacerlo habrá que modificar eventualmente la matriz de la expresión y es posible que sea menester sustituir la variable

predicado por otra con distinto número de lugares vacíos. Si $\mathfrak{A}(x, F)$ es una expresión que contiene las variables libres x y F, se tienen en primer término las fórmulas universalmente válidas (1) $\forall x \forall F \mathfrak{A}(x, F) \leftrightarrow \forall F \forall x \mathfrak{A}(x, F)$ y (2) $\exists x \exists F \mathfrak{A}(x, F) \leftrightarrow \exists F \exists x \mathfrak{A}(x, F)$, que pueden deducirse del mismo modo que las fórmulas correspondientes acerca de la permutabilidad de dos cuantificadores individuales de igual tipo inmediatamente sucesivos. Además es válida (3) $\forall x \exists F \mathfrak{A}(x, F) \leftrightarrow \exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G)$ [en que $\mathfrak{A}'(x, G)$ tiene el sentido dado por el axioma β]; luego $\forall x \exists F \mathfrak{A}(x, F) \rightarrow \exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G)$ es una fórmula elemental y se puede deducir $\exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G) \rightarrow \forall x \exists F \mathfrak{A}(x, F)$. Esto último se lleva a cabo del siguiente modo: en primer lugar, basándose en que el teorema (mencionado en el § 5 del capítulo III) según el cual toda tautología es deductible puede demostrarse análogamente aquí, tenemos por lo pronto como fórmula deductible $\exists x \neg \mathfrak{A}'(x, G) \vee \neg \mathfrak{A}'(y, G) \vee \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F) \vee \mathfrak{A}'(y, G)$; empleamos además el teorema VI del capítulo III, § 5 (que se puede traducir a su correspondiente y demostrar como allí se hizo), que dice que la regla de deducción (d) —incluso en su forma generalizada— da también resultados verdaderos cuando se suprimen las restricciones especiales impuestas a $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$, y obtenemos asimismo

$\exists x \neg \mathfrak{A}'(x, G) \vee \neg \mathfrak{A}'(y, G) \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F)$ [regla (d)]
$\exists x \neg \mathfrak{A}'(x, G) \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F)$ [regla (d)]
$\neg \neg \exists x \neg \mathfrak{A}'(x, G) \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F)$ [regla (a)]
o sea $\neg \forall x \mathfrak{A}'(x, G) \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F)$
$\neg \exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G) \vee \exists F \mathfrak{A}(y, F)$ [regla (c)]
es decir, $\exists G \forall x \mathfrak{A}'(x, G) \rightarrow \exists F \mathfrak{A}(y, F)$.

Puesto que en (3) $\mathfrak{A}$ era arbitraria, $\forall x \exists F \neg \mathfrak{A}(x, F) \leftrightarrow \exists G \forall x \neg \mathfrak{A}'(x, G)$ es universalmente válida, y de acuerdo con la regla para la construcción de la expresión contraria de otra dada, también (4) $\exists x \forall F \mathfrak{A}(x, F) \leftrightarrow \leftrightarrow \forall G \exists x \mathfrak{A}'(x, G)$ será universalmente válida.

Por medio de las fórmulas (1) a (4) y de la regla de sustitución es posible transformar de modo equivalente la expresión de tal suerte que todos los cuantificadores de predicados precedan a los de individuos.

Los otros teoremas demostrados por A. A. ZYKOV son los siguientes:

TEOREMA II. Sea $\mathfrak{A}$ una expresión sin variables libres que se encuentre en la forma normal prenexuada, y en cuyo prefijo todos los cuantificadores de predicados precedan a los cuantificadores de individuos. Llamaremos un paso a una sucesión de cuantificadores de existencia únicamente, o de cuantificadores universales únicamente, constituida en la parte del prefijo de modo exclusivo por cuantificadores de predicados, y designaremos por longitud del paso el número de cuantificadores de existencia —o de cuantificadores universales, en su caso— que aparezcan en el paso. Entonces, para

cada $\mathfrak{A}$ puede darse una expresión $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ sea universalmente válida y que $\mathfrak{B}$ tenga la misma forma general que $\mathfrak{A}$, pero de modo que en aquélla (en $\mathfrak{B}$) cada paso tenga la longitud uno, mientras que el número y tipo (de existencia o universal) de los pasos sean los mismos que en $\mathfrak{A}$.

TEOREMA III. Para cada expresión $\mathfrak{A}$ puede darse una expresión $\exists F \forall G \mathfrak{B}(F, G)$ del tipo siguiente: F es una variable predicado diádica y G monádica, $\mathfrak{B}(F, G)$ no contiene ninguna variable predicado fuera de F y G, y dicha expresión es tal que $\mathfrak{A}$ será universalmente válida siempre y únicamente cuando $\exists F \forall G \mathfrak{B}(F, G)$ lo sea.

Para la demostración de los teoremas II y III remitimos al trabajo original citado.

El cálculo generalizado que se obtiene a partir del cálculo restringido de predicados mediante introducción de cuantificadores de predicados representa, desde el punto de vista del simbolismo, un campo completo en sí mismo, en el cual encuentran también por primera vez formulación simbólica diferentes problemas del cálculo restringido de predicados; hace posible escribir todas las expresiones *en forma cerrada*, es decir, sin que se encuentren variables libres de ninguna clase.

§ 2. Introducción de predicados de predicados; tratamiento lógico del concepto de número

Hasta ahora nos habíamos ocupado de predicados y objetos que se diferenciaban entre sí claramente. Pero nada nos impide *considerar los antiguos predicados como objetos, que podrán ser introducidos a su vez en los lugares vacíos de unos predicados de un tipo especial, los predicados de predicados.*

Fijémonos, así, en la expresión $\exists x F x$: representa un predicado de predicados, que conviene al predicado monádico Φ siempre y únicamente cuando $\exists x \Phi x$ es verdadero. Las propiedades de *reflexividad*, de *simetría* y de *transitividad* de los predicados diádicos proporcionan otros predicados de predicados (estos predicados de predicados son monádicos, pero los objetos a los que se aplican son predicados diádicos); podemos designar con Ref (R), Sim (R) y Tr (R) —hemos colocado el argumento entre paréntesis —tales predicados de predicados; su expresión simbólica [2] será

$$\begin{aligned} &\text{Ref}(R): \quad \forall x\, R\, x\, x, \\ &\text{Sim}(R): \quad \forall x\, y\, (R\, x\, y \rightarrow R\, y\, x), \\ &\text{Tr}(R): \quad \forall x\, y\, z\, (R\, x\, y \wedge R\, y\, z \rightarrow R\, x\, z). \end{aligned}$$

Los tres predicados convienen al predicado de la identidad; por el contrario, solamente la propiedad de la transitividad conviene al predicado «<» —que,

[2] En el cálculo de predicados ordinario, naturalmente. (*N. del T.*)

por ejemplo, podemos considerar definido para los números naturales del modo usual. Por tanto, las fórmulas Ref (=), Sim (=), Tr (=) y Tr (<) representan proposiciones verdaderas, mientras que Ref (<) y Sim (<) son proposiciones falsas.

La «*equivalencia*», Eq (*F*, *G*) es un predicado diádico, que se define por la expresión «$\forall x\,(F x \leftrightarrow G x)$» y que consiste en que los predicados *F* y *G* convienen a los mismos objetos. Otros predicados de predicados diádicos son la «*intolerancia*», Int (*F*, *G*), y la «*implicación*», Imp (*F*, *G*), de predicados, que se definen simbólicamente por medio de «$\forall x\,(\neg F x \vee \neg G x)$» y «$\forall x\,(F x \rightarrow G x)$».

Sin duda, con este concepto no se logra, sin embargo, una ampliación del simbolismo, ya que los predicados de predicados que acabamos de mostrar pueden representarse con los medios del cálculo hasta ahora estudiado, y las fórmulas Ref (*R*), Sim (*R*), etc., han de considerarse sólo como abreviaciones; únicamente se consigue una ampliación cuando se introducen variables para los predicados de predicados, cuyos valores particulares sean los predicados de predicados que hemos indicado. A continuación utilizaremos sólo ocasionalmente tales variables, ya que la construcción sistemática de este cálculo ampliado de nuevo llegará más tarde, en el § 5.

Se obtiene la primera aplicación importante cuando, siguiendo a G. FREGE [5], *se somete el concepto de número a un análisis lógico*. Un número no es ningún objeto en sentido propio, sino una propiedad; los objetos a los cuales conviene el número como propiedad no pueden ser las cosas contadas mismas, puesto que cada una de ellas es una sola, y no podría aparecer, en absoluto, ningún número distinto de uno, sino que puede considerarse el número como una propiedad de aquellos conceptos mediante los cuales se reúnen los individuos contados. Así, el hecho de que el número de los continentes es cinco, por ejemplo, no puede expresarse diciendo que a cada continente le conviene el número cinco; antes bien, una propiedad del predicado «ser un continente» es la de convenir exactamente a cinco objetos.

Los números aparecen, por tanto, como predicados de predicados, y un número determinado es un predicado de predicados con determinadas propiedades. La importancia de esta representación de los números reside en que los predicados de predicados que representan a aquéllos pueden expresarse enteramente por medio de los símbolos lógicos; por ello es posible incluir la teoría de números en la lógica. Daremos ahora expresiones simbólicas para los números 0, 1 y 2, es decir, para los predicados de predicados 0 (*F*), 1 (*F*) y 2 (*F*).

0 (*F*): $\neg \exists x\, F x$ (no existe ningún *x* al cual convenga *F*),

1 (*F*): $\exists x\,(F x \wedge \forall y\,(F y \rightarrow x = y))$,

(existe un *x* para el cual $F x$ es verdadero, y tal que todo *y* para el cual $F y$ es verdadero es idéntico a *x*),

$$2(F):\ \exists x \exists y (\neg x = y \wedge F x \wedge F y \wedge \forall z (F z \rightarrow x = z \vee y = z))$$

(existen dos objetos distintos x e y a los cuales conviene F, y todo z para el cual $F z$ es verdadero es idéntico con x o con y).

Dos predicados F y G se llaman «*equinuméricos*» cuando el campo de las cosas a las que conviene F y el campo de las cosas a las que conviene G tienen el mismo número. Puede concebirse la equinumeridad de dos predicados F y G como un predicado de predicados especial, $\mathrm{Enm}(F.G)$; como tal equinumeridad no significa otra cosa sino que los objetos a los que conviene F y aquéllos a los que conviene G pueden referirse mutuamente de modo biunívoco, cabe definir $\mathrm{Enm}(F, G)$ por medio de la siguiente expresión:

$$\exists R [\forall x (F x \rightarrow \exists y (R x y \wedge G y)) \wedge \forall y (G y \rightarrow \exists x (R x y \wedge F x)) \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z ((R x y \wedge R x z \rightarrow y = z) \wedge (R x z \wedge R y z \rightarrow x = y))].$$

Es posible expresar la suma de números con ayuda de la disyunción: pues sean Φ y Ψ predicados monádicos intolerantes —es decir, sea válida $\forall x (\neg \Phi x \vee \neg \Psi x)$—; $\Phi \vee \Psi$ significa el predicado que, para todo x, tiene el mismo valor veritativo que $\Phi x \vee \Psi x$; ocurran además $m(\Phi)$ y $n(\Psi)$ (o sea, tenga Φ el número m y Ψ el número n); entonces al predicado $\Phi \vee \Psi$ corresponde el número $m + n$. Fundándose en esta concepción, las igualdades numéricas tales como $1 + 1 = 2$ y $2 + 3 = 5$ se convierten en enunciados demostrables de modo puramente lógico; por ejemplo, la igualdad $1 + 1 = 2$ se representa por la fórmula

$$\forall F \forall G (\mathrm{Int}(F, G) \wedge 1(F) \wedge 1(G) \rightarrow 2(F \vee G)),$$

cuyo carácter universalmente válido se hace patente cuando se reemplazan el predicado de predicados Int, así como los 1 y 2, por sus expresiones definitorias.

También el concepto general de número puede establecerse con los medios lógicos. Si un predicado de predicados, Φ, representa un número, Φ ha de satisfacer la siguiente condición: en lo que se refiere a dos predicados equinuméricos, Ψ y Γ, Φ ha de convenir a los dos o a ninguno, y además si dos predicados Ψ y Γ no son equinuméricos, Φ puede convenir a lo más a uno de ellos; esta condición impuesta a Φ puede representarse del siguiente modo:

$$\forall F \forall G [(\Phi(F) \wedge \Phi(G) \rightarrow \mathrm{Enm}(F, G)) \wedge (\Phi(F) \wedge \mathrm{Enm}(F, G) \rightarrow \Phi(G))].$$

Esta expresión representa una propiedad de Φ; designándola con $\mathfrak{Z}(\Phi)$ por razones de brevedad, podemos decir: *un número es un predicado de predicados, Φ, que tiene la propiedad $\mathfrak{Z}(\Phi)$*. Con todo, se encuentra una dificultad cuando se pregunta por la condición que han de cumplir dos predicados de predicados, Φ y Ψ, que tienen las propiedades $\mathfrak{Z}(\Phi)$ y $\mathfrak{Z}(\Psi)$, para definir el mismo número; esta condición consiste en que Φ y Ψ han de ser

verdaderos para los mismos predicados, y por tanto se tendrá la relación $\forall P\,(\Phi(P) \leftrightarrow \Psi(P))$; admitamos ahora que el campo de individuos supuesto consta de un número finito de objetos: nos tropezamos entonces con la dificultad de que quedan igualados todos los números que sean mayores que el número de objetos del campo de individuos; pues si dicho número es, digamos, menor que 10^{60} y suponemos que Φ y Ψ son los predicados de predicados que definen respectivamente los números 10^{60} y $10^{60} + 1$, ni Φ ni Ψ convienen a ningún predicado de tal campo, y por tanto la relación $\forall P\,(\Phi(P) \leftrightarrow \Psi(P))$ es verdadera para Φ y Ψ, o sea que Φ y Ψ representarían el mismo número que en el citado campo de individuos. Para sortear esta dificultad ha de suponerse infinito el campo de individuos. (No se pretende con tal motivo dar una prueba lógica de la existencia de una totalidad infinita.)

Por lo demás, el concepto de número definido arriba es general y no está necesariamente limitado a los números naturales; correspondería al número cardinal de la teoría de conjuntos. Tiene especial interés la cuestión de cómo podría definirse dentro de tal concepto de número un concepto más particular de número natural, y cómo podrían demostrarse lógicamente —sin duda mediante una utilización esencial del axioma de infinitud mencionado— los axiomas de la teoría de números. Pero no podemos entrar en ello aquí con más detalle, ya que las observaciones hechas intentaban únicamente hacer ver de modo correcto las posibilidades de aplicación de un cálculo generalizado; remitimos a quien se interese por tal materia, además de a los trabajos fundamentales de G. FREGE [5] y de A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL [16], al libro de B. RUSSELL [11], que es accesible para todos y puede servir para una primera orientación.

§ 3. Representación de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos en el cálculo generalizado

Ya en el primer capítulo se vio que entre la teoría de conjuntos y la lógica matemática existe una estrecha conexión. Las mismas relaciones lógicas podían considerarse, ya como relaciones entre clases (clase es únicamente otra expresión para conjunto), ya como relaciones entre predicados monádicos —según vimos luego en el capítulo tercero. Ahora bien, el cálculo de clases ofrece solamente una porción relativamente pequeña de la totalidad de la teoría de conjuntos, y el parentesco entre la lógica matemática y esta teoría es enteramente general.

Con objeto de darnos cuenta más a fondo de tal conexión vamos a fijar nuestra mirada más circunstanciadamente, por lo pronto, en la relación entre los conjuntos y los predicados en sentido restringido —es decir, los predicados con un lugar vacío.

Un conjunto, o se da por enumeración de sus elementos, o se especifica como el sistemas de aquellas cosas a las que conviene un predicado determinado. No necesitamos propiamente fijar la atención en el primer sistema de determinación de un conjunto (que solamente es posible en el caso de conjuntos finitos), pues todo conjunto a que se llega por enumeración de sus elementos puede definirse también por medio de un predicado; por ejemplo, el conjunto que consta de los elementos α, β y γ puede especificarse como aquél al que conviene el predicado «$x = \alpha \vee x = \beta \vee x = \gamma$». Por tanto, consideramos definido todo conjunto por medio de un predicado; acerca de lo cual hemos de percatarnos de que, ciertamente, todo predicado determina unívocamente el conjunto correspondiente a él, pero que a cada conjunto determinado no corresponde un solo predicado definidor, sino que más bien es posible definir un conjunto de maneras diferentes por medio de predicados: así, el conjunto de los triángulos equiláteros es igual al conjunto de los triángulos equiángulos.

La condición necesaria y suficiente para que dos predicados Φ y Ψ determinen el mismo conjunto consiste en que ambos predicados sean equivalentes, y por tanto en que satisfagan la condición Eq (Φ, Ψ), o sea $\forall x (\Phi x \leftrightarrow \Psi x)$. En el sentido de la teoría de conjuntos, el predicado de predicados Eq (P, Q) no es, pues, sino la identidad de P y Q.

Así como se conciben los predicados como conjuntos, se puede interpretar un predicado monádico $\Phi (P)$ como una propiedad de conjuntos. Para que sea posible tal interpretación es necesario que el convenir o no convenir de Φ al predicado Ψ esté unívocamente determinado por medio del conjunto correspondiente a Ψ, y —de acuerdo con lo advertido antes— se tiene además la decisiva condición de que las proposiciones que asocien propiedades equivalentes con el predicado de predicados Φ han de ser simultáneamente falsas o simultáneamente verdaderas; así, ha de cumplirse para el predicado Φ la relación simbólica

$$\text{«}\forall P \forall Q (\text{Eq}(P, Q) \rightarrow (\Phi (P) \rightarrow \Phi (Q)))\text{»},$$

que designaremos abreviadamente con $\mathfrak{M} (\Phi)$.

Esta condición la satisfacen, por ejemplo, los predicados de predicados que representan números: en esta propiedad de los números estriba el que éstos puedan considerarse también como propiedades de conjuntos. La representación de los números como propiedades de conjuntos tiene la ventaja, frente a su representación como propiedades de predicados, de que en aquélla es evidente la invariancia del número frente a la sustitución de un predicado por otro equivalente.

A partir de la relación entre conjuntos y predicados se hace patente, además, una conexión entre los conjuntos de conjuntos y los predicados de predicados. Cada conjunto de conjuntos está definido por una propiedad que

poseen los conjuntos pertenecientes a él; tomemos ahora dos predicados de conjuntos, o lo que es lo mismo, dos predicados de predicados, $\Phi(P)$ y $\Psi(P)$, que satisfagan la condición $\mathfrak{M}(\Phi)$ y $\mathfrak{M}(\Psi)$; a ambos predicados de conjuntos, Φ y Ψ, corresponde el mismo conjunto de conjuntos, si Φ y Ψ convienen a los mismos conjuntos: por tanto, la relación $\forall P(\Phi(P) \leftrightarrow \Psi(P))$ significa que los conjuntos correspondientes a Φ y Ψ son idénticos.

Ocurre, por lo demás, que todos los predicados de predicados que podemos formar en el marco de nuestro simbolismo por medio de las conexiones proposicionales y de cuantificadores, son tales que convienen o no convienen a los predicados equivalentes, pero siempre del mismo modo. Si se quiere expresar que no se consideran predicados de predicados de otro tipo —y, en general, no existe ningún motivo en la lógica para evitar este supuesto— podemos adjuntar como un axioma especial la generalización de la fórmula anterior, o sea

$$\forall P \forall Q (\mathrm{Eq}(P, Q) \rightarrow \forall F (F(P) \rightarrow F(Q))),$$

a la estructuración al modo acostumbrado del cálculo generalizado de predicados: con ello se consideran los predicados equivalentes —de acuerdo con la definición anterior de identidad— como idénticos, y se adopta la identificación total de los predicados con los conjuntos correspondientes a ellos. Este axioma se conoce con el nombre de *axioma de extensionalidad.*

Cabe extender a los predicados con varios lugares vacíos la interpretación del cálculo generalizado de predicados desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Para cada predicado $\Gamma x y$ se escoge, de entre el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) que se pueden considerar, un conjunto determinado de parejas ordenadas: a saber, el conjunto de las parejas (x, y) para las que $\Gamma x y$ es verdadero. Los conjuntos correspondientes a dos predicados Γ_1 y Γ_2 son idénticos cuando se cumple la relación $\mathrm{Eq}(\Gamma_1, \Gamma_2)$, o sea $\forall x y (\Gamma_1 x y \leftrightarrow \Gamma_2 x y)$. Si se ha de interpretar un predicado de predicados $\Phi(R)$ como predicado de los conjuntos correspondientes, ha de satisfacer la relación

$$\forall R_1 R_2 (\mathrm{Eq}(R_1, R_2) \rightarrow (\Phi(R_1) \rightarrow \Phi(R_2))).$$

También aquí se puede adjuntar el correspondiente axioma de extensionalidad, es decir,

$$\forall R_1 R_2 (\mathrm{Eq}(R_1, R_2) \rightarrow \forall F (F(R_1) \rightarrow F(R_2))).$$

Análogamente ocurre con predicados con tres o más lugares vacíos.

Vamos a ver ahora cómo encuentran expresión simbólica las composiciones usuales de la teoría de conjuntos. Si Φ_1 y Φ_2 son los predicados que definen dos conjuntos, la *reunión de ambos conjuntos* se definirá por medio de un predicado Ψ tal que para todo x Ψx tenga el mismo valor que $\Phi_1 x \vee \Phi_2 x$. Si se especifica que Ψ sea tal que sea válida $\forall x (\Psi x \leftrightarrow \Phi_1 x \wedge \Phi_2 x)$, enton-

ces Ψ define la *intersección* de ambos conjuntos. El conjunto correspondiente a Φ_1 es un *conjunto parcial* del conjunto correspondiente a Φ_2 siempre y únicamente cuando $\forall x (\Phi_1 x \rightarrow \Phi_2 x)$ es verdadera. Los conjuntos correspondientes a Φ_1 y Φ_2 son *equivalentes* (aquí se dice «equivalentes» en el sentido de la teoría de conjuntos, sentido que no se ha de confundir con el concepto que hemos introducido de equivalencia de predicados) si los elementos de ambos conjuntos pueden referirse entre sí de modo biunívoco; la expresión simbólica correspondiente es la misma que habíamos dado en el § 2 para la equinumeridad de los dos predicados Φ_1 y Φ_2. El *conjunto de todos los conjuntos parciales* de un conjunto definido por el predicado Φ está definido por medio del predicado de predicados $\forall x (P x \rightarrow \Phi x)$. Supongamos ahora que el predicado de predicados $\Phi (P)$ representa un conjunto de conjuntos: los elementos del *conjunto reunión de estos conjuntos de conjuntos* están caracterizados por ser elementos al menos de un conjunto definido mediante un predicado Ψ tal que $\Phi (\Psi)$ es verdadera [3]; por ello se adopta $\exists P (\Phi (P) \wedge P x)$ como expresión definitoria del conjunto reunión (en la cual x designa el lugar vacío del predicado); los elementos de la *intersección de estos conjuntos de conjuntos* están definidos por ser elementos a la vez de todo conjunto para el cual exista un predicado definidor Ψ tal que $\Phi (\Psi)$ sea verdadera [3]: por tanto, la intersección se representa por $\forall P (\Phi (P) \rightarrow P x)$.

Se dice que un conjunto está *ordenado* cuando se ha definido para los elementos del conjunto un predicado diádico, Γ, que no es reflexivo pero sí transitivo, y tal que para dos elementos cualesquiera distintos, α y β, del conjunto, o bien $\Gamma \alpha \beta$ es verdadera o lo es $\Gamma \beta \alpha$. «El conjunto definido por Φ está ordenado por medio del predicado Γ» se representa simbólicamente, pues, por

$$\forall x y z (\Phi x \wedge \Phi y \wedge \Phi z \rightarrow \overline{\ } \Gamma x x \wedge (x = y \vee \Gamma x y \vee \Gamma y x) \wedge (\Gamma x y \wedge \Gamma y z \rightarrow \Gamma x z)).$$

Designamos esta fórmula abreviadamente por $\mathfrak{O} (\Phi, \Gamma)$. El conjunto definido por Φ se llama *bien ordenado* por medio del predicado Γ cuando

$$\mathfrak{O} (\Phi, \Gamma) \wedge \forall Q (\forall x (Q x \rightarrow \Phi x) \rightarrow \exists y (Q y \wedge \forall z (Q z \rightarrow y = z \vee \Gamma y z)))$$

es una proposición verdadera.

De modo análogo encuentran representación simbólica todas las demás composiciones de conjuntos usuales en la teoría de conjuntos.

§ 4. Las paradojas lógicas

Hasta ahora hemos visto qué nuevas posibilidades de expresión se originan por introducción de los predicados de predicados. Toda fórmula que con-

---

[3] Ψ es uno (cualquiera) de los valores de la variable predicado P. (*N. del T.*)

tenga una variable predicado libre puede concebirse como un predicado de predicados individual; además pueden introducirse variables para predicados de predicados: una fórmula que contenga una variable de este último tipo representará un predicado cuyos argumentos serán predicados de predicados. Este sistema de construcción puede proseguirse cuanto se desee.

Por tanto, además de los objetos del campo de individuos, también pueden servir como objetos en sentido amplio los predicados, los predicados de predicados, etc. Se plantea ahora la cuestión de si es posible reunir sin más en un solo campo de individuos todos estos objetos en sentido lato, de suerte que fuera posible hablar no solamente de predicados de individuos, predicados de predicados, etc., sino asimismo de predicados simplemente —los cuales pertenecerían a su vez al campo de individuos. En tal caso, un predicado podría también contenerse a sí mismo como argumento, análogamente habría que considerar el concepto de predicado de predicados, etc.

El modo en que nosotros nos hemos elevado a predicados superiores, partiendo del cálculo restringido de predicados, no nos ofrece asidero alguno para tal proceder; pues en las explicaciones anteriores nos habíamos ocupado siempre de predicados de individuos, predicados de predicados de individuos, etc.; antes bien, tal concepto general de predicado correspondería al uso lingüístico cotidiano. Mas se observa que tal sistema lógico no satisfaría ya al postulado de compatibilidad (o de no contradicción); puede darse a las contradicciones que surgen entonces —las llamadas *paradojas*— (y a las que, por lo demás, se ve uno conducido independientemente de que se emplee o no el simbolismo lógico) una interpretación propiamente lógica o una interpretación de la teoría de conjuntos —lo cual corresponde a la doble interpretación del cálculo de predicados—. Vamos a presentar aquí algunas de estas contradicciones.

Sea P una variable para un predicado de predicados. Puesto que los valores de P son predicados de predicados y asimismo predicados, $P(P)$ debería ser una expresión que se convirtiera en verdadera o falsa al reemplazar P por un predicado de predicados. Tomemos por ejemplo el predicado de predicados $\exists x P x$, que podemos abreviar con Cum (P) («P es cumplible»), y en el cual $\exists x$ ha de tomarse de un modo enteramente general por un objeto que también puede ser un predicado; por tanto, Cum (Cum) será una proposición verdadera —la cual significará que existe un objeto al cual conviene Cum, lo que puede querer decir únicamente que existe un predicado al cual conviene Cum—. Tomemos ahora, por el contrario, el predicado de predicados $\neg \exists x P x$ (que ya habíamos indicado abreviadamente por $0(P)$): $0(0)$ habrá de representar una proposición falsa, pues $0(0)$ significaría «no existe ningún objeto al cual convenga 0», es decir, no existe ningún predicado al cual convenga 0. Y esto significaría además: para todo predicado existe un objeto al cual conviene el predicado.

Ahora bien, la expresión $\neg P(P)$ puede concebirse como predicado de P: este predicado expresa la propiedad de un predicado de no convenirse a sí mismo; designaremos con $\Psi(P)$ tal predicado de predicados. Por tanto, para una P cualquiera, $\Psi(P)$ será verdadera siempre y solamente cuando P no se convenga a sí mismo. Entonces, o bien $\Psi(\Psi)$ es verdadera, y en tal caso, por definición de Ψ, Ψ no se conviene a sí mismo (es decir, $\Psi(\Psi)$ es falsa); o bien $\Psi(\Psi)$ es falsa, lo cual quiere decir, por definición de Ψ, que es falso que Ψ no se convenga a sí mismo (o sea, que $\Psi(\Psi)$ es verdadera). Con lo cual hemos obtenido una contradicción.

Esta paradoja fue descubierta por B. RUSSELL, y puede representársela asimismo utilizando los medios de expresión de la teoría de conjuntos: en ella, al predicado Ψ corresponde el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como un elemento. Este conjunto es contradictorio en su mismo concepto, ya que de acuerdo con su definición pertenece a sus propios elementos siempre y exclusivamente cuando no pertenece a ellos.

La *segunda paradoja de que hemos de hablar* era ya conocida por la filosofía griega. Su versión más sencilla es la siguiente: alguien dice «miento»; o, más circunstanciadamente, «enuncio ahora una proposición falsa»; pues esta proposición es verdadera con tal de que sea falsa, y es falsa con tal de que sea verdadera.

Vamos a emprender ahora la formulación de la paradoja con un poco más de rigor. Llamemos $\mathfrak{P}$ a cierta persona, y sea t la designación de un intervalo temporal determinado. En el interior de este espacio de tiempo, $\mathfrak{P}$ enuncia la siguiente aserción: «todo lo que $\mathfrak{P}$ afirma en el espacio de tiempo t es falso»; y $\mathfrak{P}$ no dice ninguna otra cosa durante el tiempo t. Esta suposición no es en modo alguno contradictoria, ya que ciertamente se puede llevar a cabo deliberadamente. Para expresarla en el simbolismo lógico, designemos con $\mathfrak{A}$ la proposición aducida por $\mathfrak{P}$, y empleemos el signo de predicado $Af(X)$ con el significado «$\mathfrak{P}$ afirma X en el espacio de tiempo t» —en donde cualquier proposición sería apta para dar valor al argumento X.

Mediante estos signos podemos transcribir por lo pronto la proposición por la fórmula $\forall X(Af(X) \rightarrow \neg X)$, si utilizamos un cuantificador de proposiciones. Nuestra hipótesis de que $\mathfrak{P}$ enuncia la aserción $\mathfrak{A}$ dentro del tiempo t y no enuncia nada más, se presenta mediante las dos fórmulas

$$Af(\mathfrak{A}) \quad \text{y} \quad \forall X(Af(X) \rightarrow \mathfrak{A} = X).$$

Mas ahora se llega a una contradicción del modo siguiente. Reemplazamos el segundo miembro de la fórmula verdadera $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ por el significado que se le ha dado con la expresión $\forall X(Af(X) \rightarrow \neg X)$, y se obtiene $\mathfrak{A} \rightarrow \forall X(Af(X) \rightarrow \rightarrow \neg X)$; podemos suprimir aquí el signo universal $\forall x$ si interpretamos la aparición de la variable libre X al modo usual: obtenemos entonces $\mathfrak{A} \rightarrow (Af(X) \rightarrow \neg X)$, y luego, por reemplamiento de la variable proposi-

cional X, $\mathfrak{A} \to (Af(\mathfrak{A}) \to \neg\, \mathfrak{A})$; puesto que —según las reglas del cálculo proposicional— podemos permutar las hipótesis, llegamos a $Af(\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} \to \to \neg\, \mathfrak{A})$. Además, como $Af(\mathfrak{A})$ es una fórmula verdadera, según la regla de separación se tiene $\mathfrak{A} \to \neg\, \mathfrak{A}$. Por otra parte, se puede demostrar $\neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$: pues, en primer término, $\neg\, \mathfrak{A} \to \neg\, \mathfrak{A}$ es válida, y reemplazando la segunda $\mathfrak{A}$ por la expresión definitoria lo es también $\neg\, \mathfrak{A} \to \neg\, \forall X (Af(X) \to \neg\, X)$, que aplicando el teorema de la formación de la expresión contraria a una dada nos proporciona $\neg\, \mathfrak{A} \to \exists X \neg\, (Af(X) \to \neg\, X)$; dado que, según el cálculo de proposiciones, $\neg\, (Af(X) \to \neg\, X)$ es equivalente a $Af(X) \wedge X$, se sigue $\neg\, \mathfrak{A} \to \exists X (Af(X) \wedge X)$; además, a partir de la fórmula $\forall X (Af(X) \to \to \mathfrak{A} = X)$, que hemos supuesto verdadera, se concluye $\forall X (Af(X) \wedge X \to \to \mathfrak{A} = X \wedge X)$, y de aquí [cf. la fórmula (20) del capítulo II, § 4] esta otra, $\exists X (Af(X) \wedge X) \to \exists X (\mathfrak{A} = X \wedge X)$, y por deducción en cadena se llega a $\neg\, \mathfrak{A} \to \exists X (\mathfrak{A} = X \wedge X)$; ahora bien, de acuerdo con el significado de la identidad, $(\mathfrak{A} = X \wedge X) \to \mathfrak{A}$ es universalmente válida, a partir de ella se obtiene $\exists X (\mathfrak{A} = X \wedge X) \to \mathfrak{A}$ [cf. la fórmula (9) del capítulo III, § 4], y por deducción en cadena se halla finalmente $\neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$.

Puesto que $\mathfrak{A} \to \neg\, \mathfrak{A}$ y $\neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ son demostrables, es patente que tanto $\mathfrak{A}$ como $\neg\, \mathfrak{A}$ son fórmulas verdaderas, con lo cual nos hemos visto conducidos, de hecho, a una contradicción.

Vamos a dar ahora una *tercera paradoja,* que tiene muchas maneras diferentes de ser expresada. Una forma sencilla de expresarla es la siguiente. Todo designar un número natural determinado —ya sea por medio de un signo convencional o dando una propiedad definitoria— exige cierto intervalo mínimo de tiempo; por tanto, una cantidad finita de hombres sólo puede designar en un tiempo finito una cantidad finita de números. Por otro lado, existen infinitos números. Así pues, los hombres que vivan en la Tierra en el siglo XX, es seguro que no designarán todos los números; uno de los números no designados en el siglo XX será el más pequeño de todos ellos; ahora bien, este número ha sido designado en el siglo XX, ya que le he determinado por la propiedad de ser el más pequeño de los números no designados en el siglo XX. Se tiene, pues, la existencia de un número al cual se designa y no se designa.

Con objeto de precisar la argumentación a fines de su representación simbólica, sustituyamos el concepto de designación por otro más estricto. Vamos a fijar la atención únicamente en aquella designación de un número que tiene lugar, en el sentido de nuestro simbolismo lógico, cuando se escribe una expresión correspondiente a un predicado definitorio del número —entendemos por predicado definitorio del número x uno que conviene al número x y a ningún otro. (No es necesario tener en cuenta en los razonamientos presentes que los números pueden interpretarse como predicados de predicados.) De este modo llegamos a la siguiente versión de la paradoja. Signifi-

que *Esc* (*P*) la propiedad de un predicado *P* de que, entre las expresiones del simbolismo lógico escritas en el siglo XX, al menos una de ellas sea una expresión de *P*. Se utilizará el signo «$x < y$», como antes, para el predicado «*x* es menor que *y*», y precisamente de modo que los lugares vacíos de este predicado se refieran a los números naturales. Además, escribamos abreviadamente $Df\,(P, x)$ en lugar de la expresión «$P\,x \wedge \forall\, y\,(P\,y \rightarrow x = y)$», la cual dice que *x* se define por medio del predicado *P*. Como abreviación de «$\exists\, P\,(Df\,(P, x) \wedge Esc\,(P))$», empléese el símbolo $Des\,(x)$, que tendrá, pues, el siguiente significado: «entre las expresiones simbólicas escritas en el siglo XX, una de ellas por lo menos representa un predicado que define a *x*», o de un modo más breve, «*x* es definido simbólicamente en el siglo XX por lo menos una vez». Finalmente, tómese como abreviación de la expresión «$\neg\, Des\,(x) \wedge \wedge \forall\, y\,(y < x \rightarrow Des\,(y))$» el signo $Mde\,(x)$, que significará, por tanto, «*x* tiene la propiedad de ser el menor de todos los números no definidos simbólicamente en el siglo XX».

Suponemos que las siguientes fórmulas, que transcriben propiedades fundamentales del predicado «<», representan aserciones verdaderas:

$$\forall\, x\,(\neg\, x < x),$$
$$\forall\, x\, y\, z\,(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z),$$
$$\forall\, x\, y\,(x = y \vee x < y \vee y < x),$$
$$\exists\, x\, P\, x \rightarrow \exists\, x\,(P\,x \wedge \forall\, y\,(y < x \rightarrow \neg\, P\,y)).$$

(La última fórmula ha de considerarse universalmente válida.) De estas cuatro fórmulas, las tres primeras significan que la relación «<» ordena los números naturales, y la última que los ordena bien. Suponemos además que es verdad que no todos los números pueden definirse en el siglo XX, o sea suponemos la verdad de la fórmula $\exists\, x\, \neg\, Des\,(x)$. Además es verdadera $Esc\,(Mde)$, ya que con ella hemos escrito una expresión para $Mde\,(x)$.

Podemos ahora llevar a cabo la siguiente demostración formal. Reemplazamos la variable predicado *P* en la fórmula $\exists\, x\, P\, x \rightarrow \exists\, x\,(P\,x \wedge \forall\, y\,(y < x \rightarrow \rightarrow \neg\, P\,y))$, y obtenemos

$$\exists\, x\, \neg\, Des\,(x) \rightarrow \exists\, x\,[\neg\, Des\,(x) \wedge \forall\, y\,(y < x \rightarrow Des\,(y))],$$

en la cual hemos suprimido una doble negación delante de $Des\,(y)$. Como $\exists\, x\, \neg\, Des\,(x)$ es verdadera, según la regla de separación se llega a $\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge \forall\, y\,(y < x \rightarrow Des\,(y)))$; utilizando la abreviación *Mde*, esta última expresión se escribe $\exists\, x\, Mde\,(x)$. De acuerdo con la definición de *Mde*, se tiene la relación $Mde\,(x) \rightarrow \neg\, Des\,(x)$; puesto que, además, por la definición de *Mde*, es posible definir *x* por $Mde\,(x)$ unívocamente, cabe deducir de tal definición la fórmula

$$Mde\,(x) \rightarrow Mde\,(x) \wedge \forall\, y\,(Mde\,(y) \rightarrow x = y)$$

y escribirla, utilizando la abreviación *Df*,

$$Mde\,(x) \rightarrow Df\,(Mde, x).$$

A partir de esta fórmula y de la anterior obtenemos

$$Mde\,(x) \rightarrow \neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(Mde, x).$$

Además se halla $\exists\, x\, Mde\,(x) \rightarrow \exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(Mde, x))$ [cf. la fórmula (21) del capítulo III, § 4]; pero como $\exists\, x\, Mde\,(x)$ está demostrada, según la regla de separación se obtiene $\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(Mde, x))$. Como hemos supuesto que *Esc* (*Mde*) era verdadera, puede demostrarse también $\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(Mde, x) \wedge Esc\,(Mde))$. Ahora bien, la fórmula $F\,(Q) \rightarrow$ $\rightarrow \exists\, P\,(F\,(P))$ es universalmente válida; reemplazamos en ella las variables Q y F del modo siguiente: Q por *Mde* y $F*$ por $\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(*, x) \wedge$ $\wedge\, Esc\,(*))$ —indicándose con el asterisco los lugares vacíos correspondientes—, con lo cual obtenemos

$$\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(Mde, x) \wedge Esc\,(Mde)) \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists\, P\, \exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(P, x) \wedge Esc\,(P)).$$

Como el primer miembro de la implicación está demostrado se halla

$$\exists\, P\, \exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Df\,(P, x) \wedge Esc\,(P)).$$

Podemos ahora permutar los puestos de ambos signos de existencia: aplicando la fórmula análoga a la (24) del capítulo III, § 4, encontramos

$$\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge \exists\, P\,(Df\,(P, x) \wedge Esc\,(P))).$$

Basta utilizar la abreviación *Des* para escribir la última expresión así: $\exists\, x\,(\neg\, Des\,(x) \wedge Des\,(x))$. Por otra parte, la fórmula $\forall\, x\,(Des\,(x) \vee \neg\, Des\,(x))$ es deductible, ya que procede de la fórmula universalmente válida $\forall\, x\,(F\,x \vee$ $\vee \neg\, F\,x)$ por reemplazamiento. De estas dos fórmulas cada una expresa lo contrario que la otra, de modo que tenemos una contradicción.

No podemos conformarnos tampoco con estas diversas contradicciones, como si fuera posible admitir que sea un hecho la demostrabilidad de ciertas proposiciones contrapuestas. Pues en cuanto toleremos que sean fórmulas verdaderas dos proposiciones contradictorias, $\mathfrak{A}$ y $\neg\, \mathfrak{A}$, todo el cálculo lógico carecerá de sentido —como ya hicimos notar anteriormente— puesto que podremos deducir cualquier fórmula.

Veamos ahora qué consecuencias se siguen de las paradojas para la construcción de nuestro cálculo. La paradoja russelliana muestra claramente que no podemos utilizar un concepto indiscriminado de predicado, del tipo indicado al comienzo de este parágrafo: pues su admisión originaría una contradicción del cálculo de predicados. Las otras paradojas tienen otro carácter: muestran, por lo pronto, la intolerancia de ciertas fórmulas, que en el primer

caso eran $Af(\forall X(Af(X) \rightarrow \neg X))$ y $\forall X(Af(X) \rightarrow \forall Y(Af(Y) \rightarrow \neg Y) = X)$, y en el segundo $\exists x \neg Des(x)$, $Esc(Mde)$ y $\forall P(\exists x P x \rightarrow \exists x(P x \wedge \wedge \forall y(y < x \rightarrow P y)))$; ninguna de estas fórmulas es verdadera por razones puramente lógicas, de modo que las paradojas no afectan al cálculo generalizado, ya que éste no es capaz de hacer patente el carácter puramente lógico que tuvieran: hemos tenido que apoyar en varias ocasiones la formalización parcial en reflexiones referentes al contenido. Por tanto, no es menester sacar consecuencia alguna de tales paradojas en lo que se refiere a la construcción de nuestro cálculo.

A pesar de lo cual las paradojas del segundo tipo, que se llaman *paradojas semánticas*, requieren una explicación. Si las miramos más de cerca encontramos, por ejemplo, que $Af(X)$ es un predicado de proposiciones de un tipo enteramente distinto al de los que antes habíamos considerado: $Af(X)$ no depende del valor de la proposición X, es decir, de si ésta es verdadera o falsa, sino de su formulación lingüística; así, no constituye contradicción alguna el que supongamos que para una proposición son simultáneamente verdaderas $Af(\mathfrak{A})$ y $Af(\neg \mathfrak{A})$, o que $Af(\mathfrak{A})$ y $\neg Af(\neg \neg \mathfrak{A})$ lo son ambas asimismo. Con tales proposiciones nos movemos en un plano enteramente distinto al anterior. Las proposiciones que se establecen en el cálculo generalizado de predicados, esto es, con los medios de este lenguaje formal, forman por sí mismas una clase, y no pueden mezclarse con las proposiciones que no se formulan en el interior de tal lenguaje formal, sino acerca de él. Entre los dos tipos de proposiciones no existen relaciones lógicas; en principio no es admisible operar en el mismo lenguaje formal con ambos tipos. Esto no quiere decir que las proposiciones del último tipo no puedan sujetarse a las reglas del cálculo lógico, sino que en tal caso deben adoptarse símbolos propios para el lenguaje formal correspondiente. Por ejemplo, una proposición tal como la $\forall X(Af(X) \rightarrow \neg X)$ carece de sentido: pues X y con ella $\neg X$ pertenecen a un lenguaje, pero $Af(X)$ pertenece a otro, de modo que no puede establecerse implicación alguna entre $Af(X)$ y $\neg X$; análogamente ocurre con los predicados de predicados, tales como $Esc(P)$, etc., en la tercera paradoja. Siguiendo la tercera paradoja es posible poner de manifiesto, incluso sin emplear la lógica simbólica, que las paradojas semánticas deben su origen a una inadmisible mescolanza de lenguajes: si en aquélla se sustituye la expresión «el menor de todos los números naturales no definidos en el siglo XX» por «el menor de todos los números naturales no definidos en francés en el siglo XX» y se continúa el razonamiento en español, desaparece la paradoja.

Ha de distinguirse asimismo con rigor entre el lenguaje simbólico de un cálculo y el lenguaje acerca del cálculo, o sea el lenguaje acerca de las expresiones, teoremas, etc., del cálculo: este último lenguaje se llama el *metalenguaje* correspondiente al cálculo —que puede ser, bien una parte del len-

guaje ordinario (como ocurre a lo largo de todo este libro), bien un lenguaje que esté a su vez formalizado, pero entonces con símbolos enteramente distintos de los del lenguaje del cálculo (así, *la metamatemática* corresponde a unas matemáticas formalizadas). Basten aquí estas observaciones sobre las paradojas semánticas; remitimos a quien esté interesado por mayores detalles a A. TARSKI [14].

Haremos notar únicamente además que la consideración de las paradojas semánticas (que durante largo tiempo fue tenida por un jugueteo inútil), así como la correspondiente confrontación entre lenguaje del cálculo y metalenguaje, han hecho madurar importantes resultados científicos, a los cuales pertenece, por ejemplo, el teorema gödeliano de la incompletitud citado en el § 1; acerca de esta cuestión remitimos a D. HILBERT y P. BERNAYS [8, § 5].

§ 5. El cálculo de niveles

Tras habernos orientado en las secciones precedentes acerca de las mayores posibilidades de expresión que lleva consigo la introducción de los predicados de predicados, y asimismo sobre los peligros que una aplicación ilimitada del concepto de predicado tiene como consecuencia, entremos ahora en la cuestión de construir el cálculo correspondiente de modo sistemático y exacto.

El principio que fundamenta esta construcción, y que permite evitar la paradoja russelliana y otras análogas, es la *teoría de los tipos* de A. N. WHITEHEAD y B. RUSSELL, que estos autores introdujeron en la lógica con su obra fundamental «Principia Mathematica». Según esta teoría, los argumentos de un predicado son siempre de nivel menor que el predicado mismo. Tenemos por lo pronto los individuos, es decir, los objetos, de los cuales sólo necesitamos saber que pueden funcionar como argumentos de los predicados; tenemos después los predicados de individuos, o sea los predicados que se convierten en proposiciones verdaderas o falsas siempre y únicamente cuando en sus lugares vacíos se colocan individuos: estos predicados se llaman *predicados de primer nivel;* entendemos por *predicado de segundo nivel* aquél que tiene al menos un lugar vacío que ha de llenarse con un predicado de individuos, mientras que los demás lugares vacíos que pudiera tener podrán llenarse asimismo con predicados de individuos o con individuos. En particular, se distinguirán las especies o tipos de predicados de segundo nivel según el número y la clase de sus lugares vacíos, incluso teniendo en cuenta, por ejemplo, si en un lugar vacío determinado se ha de colocar un predicado de individuos monádico, diádico, etc. Análogamente se llega a predicados de tercero, de cuarto nivel, etc., de los cuales existe aún mayor variedad.

Vamos a servirnos de un simbolismo sencillo para señalar exactamente el tipo de un predicado (o de una variable predicado correspondiente). Designamos con i el tipo de un individuo o de una variable individual. Si tenemos

una variable predicado o un predicado con n lugares vacíos, y en sus lugares vacíos han de colocarse los tipos $a_1, \ldots, a_n$, el tipo de tal variable predicado o predicado será $(a_1, \ldots, a_n)$. Por ejemplo, los tipos de los predicados de individuos monádicos, diádicos y triádicos son, respectivamente, (i), (i, i) e (i, i, i); $((i, i), i)$ significaría el tipo de un predicado diádico de segundo nivel en cuyo primer lugar vacío habría de colocarse un predicado de individuos diádico, y cuyo segundo lugar vacío se llenaría con un individuo. De los predicados de predicados mencionados en el § 2 de este capítulo, Sim tiene el tipo $((i, i))$, 0 el tipo $((i))$, $\mathfrak{Z}$ el tipo $(((i)))$, Imp el tipo $((i), (i))$, etc.: suponemos para ello —entonces no lo habíamos establecido exactamente— que los lugares vacíos de Sim, 0 e Imp se refieren a predicados de individuos, y que el lugar vacío de $\mathfrak{Z}$ se refiere a un predicado de segundo nivel en cuyo lugar vacío sólo cabe que se presente un predicado de individuos; estos predicados de predicados pueden, por lo demás, definirse de modo análogo en niveles superiores.

Por otra parte, dejaremos sin decidir de si la construcción de los predicados bosquejada es la única posible o si sería lícita la construcción con una diferenciación menos detallada de los predicados. La «*teoría simple de los tipos*» que hemos descrito fue utilizada primeramente en la segunda edición de los «Principia Mathematica», publicada por F. P. RAMSEY, y estaba contenida implícitamente, por otra parte, en las investigaciones hilbertianas acerca de los fundamentos de la Matemática. En la primera edición de los «Principia Mathematica» se empleaba una subdivisión más fina de los predicados, la llamada «*teoría ramificada de los tipos*»: según ésta ya no se está autorizado, por ejemplo, a suponer para todos los predicados monádicos de individuos un tipo único, sino que se distinguen los predicados individuales entre sí según el modo de su definición; por ejemplo, un predicado individual que se define por medio de un cuantificador cualquiera para predicados tendrá un tipo más elevado que los predicados de individuos de la clase más sencilla —predicados elementales determinados que WHITEHEAD y RUSSELL han llamado predicados «predicativos» de individuos—. En general, ocurre en esta teoría ramificada de los tipos que no solamente el tipo de un predicado es más elevado que el de sus argumentos (como ocurre en la teoría simple de los tipos), sino que es también más alto que el de cualquier variable cuyo cuantificador entre en la definición del predicado. Se estableció esta teoría ramificada con objeto de tener en cuenta las paradojas semánticas, pero es innecesaria para evitarlas (como hemos visto) cuando se distingue rigurosamente entre un lenguaje formal y el metalenguaje correspondiente; por tanto, no entraremos en ella más a fondo; mencionemos solamente que, sin embargo, desempeña actualmente cierto papel cuando se quieren fundamentar ciertos raciocinios constructivos (cf., por ejemplo, P. LORENZEN [9]).

Una vez que nos hemos familiarizado con los pensamientos fundamentales

de la teoría de los tipos, vamos a construir sistemáticamente el cálculo correspondiente (en A. CHURCH [4], por ejemplo, se encuentra un sistema de construcción del cálculo de niveles distinto del que aquí se presenta).

Definimos en primer término el *tipo*. Un tipo es aquéllo, y solamente aquéllo, que muestra ser tal tras una aplicación finita de las siguientes reglas:

1. i es un tipo.
2. Si $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 1)$ son tipos, también $(a_1, \ldots, a_n)$ es un tipo.

Tenemos, por lo pronto, como sillares para construir las fórmulas, las variables individuales que hasta ahora habíamos designado con caracteres latinos minúsculos, eventualmente dotados de subíndices. Las variables individuales tienen el tipo i. Tenemos además las variables proposicionales, que habíamos designado con caracteres latinos mayúsculos: carecen de tipo. Contamos además con variables predicado, de tipos cualesquiera distintos de i, y que también designaremos con letras mayúsculas latinas; sería, pues, ineludible que adjuntásemos a cada uno de estos caracteres la indicación de su tipo: por ejemplo, que designásemos con $F^{(i,i)}$ una variable diádica para predicados de individuos, etc.; pero como de esta manera se complicaría mucho la escritura de las fórmulas, nos contentaremos en general con indicar, ante cada demostración formal, qué letras mayúsculas latinas utilizadas en ella significan variables proposicionales, y cuáles variables predicado: con lo cual utilizaremos los caracteres latinos desprovistos de indicadores de tipo. Adoptamos como conexiones proposicionales fundamentales las mismas que antes, o sea las de «$\vee$» y «$\bar{\ }$», y como cuantificadores únicamente los cuantificadores de existencia correspondientes a los diversos tipos, mientras que los demás signos de conexiones proposicionales y los universales han de considerarse, igual que antes, como abreviaciones.

Acerca de la manera de escribir las fórmulas hacemos notar que los signos que llenan los lugares vacíos situados detrás de un signo de variable predicado estarán separados entre sí mediante comas y colocados entre paréntesis; pero en fórmulas tales como «$F(x, y)$» emplearemos por regla general la notación más sencilla «$F\,x\,y$»; en la mayoría de los casos encerraremos los cuantificadores entre paréntesis, ya que de otro modo surgirían confusiones acerca de la estructura de las fórmulas: así, escribiremos, por ejemplo, $(\exists F)\,(\exists x)\,F\,x$ —o abreviadamente «$(\exists F\,x)\,F\,x$»—; mas en el caso de fórmulas como «$\exists\, x\, \exists\, y\, G\,x\,y$» (o, lo que es lo mismo, «$\exists\, x\, y\, G\,x\,y$») y cuando se trate de una serie de cuantificadores de individuos, seguiremos las mismas reglas de escritura que habíamos utilizado antes.

La definición de expresión o de fórmula, así como las de variables libres y ligadas, son análogas a las que hemos dado antes. Tenemos las siguientes reglas:

1) Una variable predicado del tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ se convertirá en una fórmula cuando se coloquen variables de los tipos $a_1, \ldots, a_n$ —separadas en-

tre sí por comas y encerradas entre paréntesis— detrás de aquélla. (Así se obtienen fórmulas primarias, en las cuales las variables que están incluidas en ellas aparecen en forma libre.)

2) Si $\mathfrak{A}$ es una fórmula, también lo es $\neg(\mathfrak{A})$. Se dice que las variables que entran en $\neg(\mathfrak{A})$ están libres o ligadas de acuerdo con el modo en que aparezcan en $\mathfrak{A}$.

3) Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas tales que en ninguna de ellas aparezca en forma libre variable alguna que se encuentre en forma ligada en la otra, entonces $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ es asimismo una fórmula. Una variable cualquiera que se halle en $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ se encontrará libre o ligada según la misma variable se encuentre en una de las fórmulas $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{B}$.

4) A partir de una fórmula que contiene una variable en forma libre, se obtiene otra fórmula cuando se sitúa delante de la primera, encerrado entre paréntesis, el signo de existencia de tal variable y se coloca entre paréntesis la fórmula de partida —a la cual se llama ahora el campo de afección de dicho signo de existencia. En la fórmula así obtenida, la variable correspondiente al signo de existencia se dice que está ligada, y las demás variables tendrán el mismo carácter que en la fórmula original.

En lo que se refiere al axiomatismo, procedemos como en el § 1 de este capítulo. Consideramos el sistema axiomático como un sistema múltiple de segundo grado.

Vamos a definir, en primer término, cuándo se dice que *una fórmula procede de otra por reemplazamiento de una variable predicado*. Sea $\mathfrak{A}$ una fórmula en la que aparezca en forma libre una variable predicado $\mathfrak{F}$ de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$, y precisamente tal que $\mathfrak{F}$ se encuentre únicamente en fórmulas primarias que comiencen por ella; sea $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ una fórmula en la que se hallen en forma libre las variables $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$, de tipos $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ ($\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ pueden significar variables predicado o variables individuales), y que podrá poseer otras variables libres distintas de $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$, con tal de que no aparezcan en forma ligada en $\mathfrak{A}$; además, en $\mathfrak{A}$ ninguno de los lugares vacíos de $\mathfrak{F}$ ha de estar provisto de variable alguna que aparezca en $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ en forma ligada. Entonces, por reemplazamiento de la variable $\mathfrak{F}$, de la fórmula $\mathfrak{A}$ procede una nueva fórmula del modo siguiente: en todos los lugares de $\mathfrak{A}$ en que se encuentre una fórmula primaria de la forma $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, sustituimos ésta por $\mathfrak{B}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ —es decir, por la fórmula que se halla cuando en $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ se sustituye $\mathfrak{U}_i$, en todos los lugares en que aparece, por $\mathfrak{a}_i$. Con lo cual es evidente la condición de que tal reemplazamiento hace siempre surgir otra fórmula.

Las *fórmulas elementales* de nuestro sistema de axiomas son las siguientes:

1. Todas las disyunciones del tipo que indicamos a continuación: aquéllas en que todos los miembros disyuntivos sean fórmulas primarias, o fórmu-

las primarias negadas, o fórmulas que consistan en un signo de existencia unido a su correspondiente campo de afección; y que, además contengan como miembros disyuntivos una fórmula primaria negada y la misma sin negar.

2. Sea $\mathfrak{U}$ una variable de tipo α, sean $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ de tipo β, $\mathfrak{T}$ de tipo (β) y $\mathfrak{F}$ de tipo (α, β), y sea asimismo $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ una fórmula con las variables libres $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$; entonces,

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{U})(\mathfrak{E}\,\mathfrak{V})\,\mathfrak{A}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \rightarrow (\mathfrak{E}\,\mathfrak{F})\,[(\mathfrak{A}\mathfrak{U})(\mathfrak{E}\mathfrak{V})\,(\mathfrak{F}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \wedge \mathfrak{A}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})) \wedge$$
$$\wedge\,(\mathfrak{A}\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{W})\,(\mathfrak{F}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \wedge \mathfrak{F}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) \rightarrow (\mathfrak{A}\mathfrak{T})\,(\mathfrak{T}(\mathfrak{V}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathfrak{W})))]$$

será una fórmula elemental.

Estas fórmulas constituyen la generalización de las fórmulas elementales α) establecidas en el § 1 de este capítulo, que están en conexión con el axioma de elección de la teoría de conjuntos.

3. Sean $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ variables de tipos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ variables de tipo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\mathfrak{T}$ una variable de tipo $((\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$; entonces,

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n)\,(\mathfrak{F}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n) \leftrightarrow \mathfrak{G}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)) \rightarrow (\mathfrak{T}(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathfrak{G}))$$

será una fórmula elemental (éstas son las fórmulas elementales de la *extensionalidad,* que habíamos mencionado ya en el § 3 del presente capítulo).

Tenemos las siguientes *reglas de deducción:*

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg\neg(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(I)}$$

En esta primera pueden faltar $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ o ambas; no mantendremos ahora las restricciones que habíamos asumido en el capítulo III para normalizar las demostraciones, aunque es posible imponerlas; lo mismo ocurre con las reglas que transcribimos a continuación:

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{N} \qquad \mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{A}(\mathfrak{U})) \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \neg(\mathfrak{E}\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(III)}$$

Aquí, $\mathfrak{U}$ es una variable de un tipo cualquiera que no aparezca en $\mathfrak{M}$ ni en $\mathfrak{N}$, y que se halle en forma libre en $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$, y $\mathfrak{V}$ es una variable del mismo tipo que la anterior, mientras que $\mathfrak{A}(\mathfrak{V})$ procede de $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$ cuando se sustituye $\mathfrak{U}$ en todos los lugares en que aparece por $\mathfrak{V}$.

$$\frac{\mathfrak{M} \vee (\mathfrak{E}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{A}(\mathfrak{U}) \vee \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee (\mathfrak{E}\,\mathfrak{U})\,\mathfrak{A}(\mathfrak{U}) \vee \mathfrak{N}}. \qquad \text{(IV)}$$

En esta regla, $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$ es una fórmula que contiene en forma libre la variable $\mathfrak{U}$ (de un tipo cualquiera); si $\mathfrak{U}$ es una variable predicado, $\mathfrak{A}'$ procede de $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$ por reemplazamiento de la variable predicado $\mathfrak{U}$, como antes hemos descrito; si $\mathfrak{U}$ es una variable individual, $\mathfrak{A}'$ procede de $\mathfrak{A}(\mathfrak{U})$ cuando se sustituye la variable individual $\mathfrak{U}$ en todos los lugares por una y la misma variable individual.

$$\frac{\mathfrak{A} \qquad \neg(\mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}. \tag{V}$$

Los signos universales que aparecen en las fórmulas elementales 2) y 3), así como los signos «→» y «↔», han de interpretarse, naturalmente, como abreviaciones. Hacemos observar que el sistema de axiomas del capítulo III, § 4, está contenido en el presente como parte especial de él.

Hemos estructurado de tal modo las fórmulas del cálculo de niveles que en su construcción sólo se emplean variables, conexiones proposicionales y cuantificadores; el sistema está cerrado en sí mismo. Pero se encuentran ciertas dificultades de expresión: por ejemplo, $F\,x$ (en que F sea un predicado monádico de individuos) puede considerarse como un predicado diádico de segundo nivel de tipo $((i), i)$ —el cual da origen a una proposición verdadera o falsa sólo y siempre cuando se coloca en el primer lugar vacío un predicado monádico de individuos y en el segundo un individuo—; pero con $F\,x \wedge F\,x$ se representa un predicado de este mismo tipo, y si queremos ahora expresar que ambos predicados son idénticos (es decir, de acuerdo con la definición de identidad dada en el § 1, que todo predicado que convenga al primer predicado convendrá también al segundo), no podemos escribir tal cosa directamente, ya que nos faltan signos especiales para ambos predicados. Mas cabe que utilicemos una perífrasis, que indicamos ahora: sean G y H variables de tipo $((i), i)$, y K una variable de tipo $(((i), i))$; se puede expresar la aserción aludida mediante $(\forall\, G\, H)\,[(\forall\, F\, x)\,(G\,(F, x) \leftrightarrow F\,x) \wedge \wedge\, (\forall\, F\, x)\,(H\,(F, x) \leftrightarrow F\,x \wedge F\,x) \rightarrow (\forall\, K)\,(K\,(G) \rightarrow K\,(H))]$; con objeto de buscar un modo de expresión más breve, observemos en primer lugar que, sin duda alguna, $(\exists\, G)\,(\forall\, F\, x)\,(G\,(F, x) \leftrightarrow F\,x)$ es demostrable: en efecto, por lo pronto la fórmula $(\exists\, G)\,\neg\,(\exists\, F)\,\neg\,\neg\,\exists\, x\,\neg\,(G\,(F, x) \leftrightarrow F\,x) \vee \vee\, (L\,y \leftrightarrow L\,y)$, que ciertamente es una tautología, puede demostrarse a partir de fórmulas elementales 1) por medio de las reglas de deducción (I) y (II) (aquí, L es una variable de tipo (i)); designaremos abreviadamente el primer miembro disyuntivo por $\mathfrak{C}$, de suerte que esta última fórmula rezará $\mathfrak{C} \vee (L\,y \leftrightarrow L\,y)$; se tiene además

$\mathfrak{C} \vee \neg\,\neg\,(L\,y \leftrightarrow L\,y)$ [según la regla (I)];
$\mathfrak{C} \vee \neg\,\exists\, x\,\neg\,(L\,x \leftrightarrow L\,x)$ [según la regla (III)];

$\mathfrak{C} \vee \neg \neg \neg \exists x \neg (L x \leftrightarrow L x)$ [según la regla (I)];
$\mathfrak{C} \vee \neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (F x \leftrightarrow F x)$ [según la regla (III)];

la última fórmula se escribe más pormenorizadamente

$$(\exists G) \neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (G(F, x) \leftrightarrow F x) \vee \neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (F x \leftrightarrow F x);$$

pero es claro que $\neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (F x \leftrightarrow F x)$ se obtiene reemplazando la variable G en $\neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (G(F, x) \leftrightarrow F x)$, y por ello, de acuerdo con la regla (IV), obtenemos $(\exists G) \neg (\exists F) \neg \neg \exists x \neg (G(F, x) \leftrightarrow F x)$, o sea $(\exists G)(\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x)$.

Por otro lado, $(\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x) \wedge (\forall F x)(H(F, x) \leftrightarrow F x) \rightarrow \rightarrow (K(G) \rightarrow K(H))$ es demostrable apoyándose en una fórmula elemental 3), ya que $(\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x) \wedge (\forall F x)(H(F, x) \leftrightarrow F x) \rightarrow (\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow \leftrightarrow H(F, x))$ puede demostrarse.

Estamos, pues, justificados al hablar *del* predicado G con la propiedad «$(\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x)$», es decir, tenemos aquí la posibilidad de introducir un «aquel, el que», como habíamos indicado en el § 12 del capítulo III —en donde se había tenido en cuenta la posibilidad de la introducción en el caso de sistemas múltiples de axiomas.

Podemos, por tanto, adoptar un signo Φ para un predicado de tipo $((i), i)$, y adjuntar $(\forall F x)(\Phi(F, x) \leftrightarrow F x)$ como nueva fórmula elemental. Para «$F x \wedge F x$» pueden hacerse análogos razonamientos: cabe, pues, introducir también un signo de predicado, Ψ, del mismo tipo que Φ, juntamente con la fórmula elemental correspondiente $(\forall F x)(\Psi(F, x) \leftrightarrow F x \wedge F x)$. La proposición arriba mencionada de que los predicados de tipo $((i), i)$ representados por $F x$ y $F x \wedge F x$ son idénticos, podrá transcribirse entonces por $(\forall K)(K(\Phi) \rightarrow K(\Psi))$, en que K será una variable de tipo $(((i), i))$.

La segunda posibilidad mencionada en el capítulo III, § 12, en lo que se refiere a la introducción de «aquel, el que», era la de añadir una «ι»; a «Φ» correspondería ahora «$\iota_G (\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x)$», y a «$\Psi$», «$\iota_G (\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x \wedge F x)$» como tal modo de escribir es complicado, en lugar de $\iota_G (\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x)$ pondremos $(\lambda F x)(F x)$, y en vez de $\iota_G (\forall F x)(G(F, x) \leftrightarrow F x \wedge F x)$ transcribiremos más sencillamente $(\lambda F x)(F x \wedge F x)$. Las fórmulas elementales correspondientes son $(\forall F x)(\{(\lambda L y)(L y)\}(F, x) \leftrightarrow F x)$ y $(\forall F x)(\{(\lambda L y)(L y \wedge L y)\}(F, x) \leftrightarrow F x \wedge \wedge F x)$ —en las que hemos encerrado los signos de predicados entre llaves en beneficio de la claridad.

Vamos a emprender ahora la *introducción en general de predicados especiales*. Por lo pronto hemos de ampliar el concepto de fórmula. La regla 1) acerca de la formación de fórmulas nos proporciona la siguiente versión ampliada:

1. Una variable predicado o un signo de predicado de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$ se convertirá en una fórmula cuando se coloquen variables o signos de tipos $a_1, \ldots, a_n$, en este orden de sucesión, tras la variable predicado o el signo de predicado, respectivamente. No se admite que en tales fórmulas aparezca variable alguna a la vez libre y ligada: por tanto, las variables que aparezcan en un signo libres o ligadas se considerarán respectivamente libres o ligadas en el conjunto de la fórmula. Las variables aisladas que llenen los lugares vacíos de las variables predicados o de los signos de predicado, así como una variable predicado con la que comience la fórmula, serán en ésta variables libres. Si la fórmula empieza por un signo de predicado que comienza con λ, tal signo se colocará entre llaves. Por añadidura, las variables proposicionales son fórmulas —justamente las fórmulas primarias.

Las reglas 2) a 4) para la formación de fórmulas no sufren alteración. Se añade además la siguiente regla:

5) Sea $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ una fórmula que contenga en forma libre las variables $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ $(n \geqq 1)$ de tipos $a_1, \ldots, a_n$; entonces, se tiene que $(\lambda\, \mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n)(\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n))$ es un signo de predicado de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$. A las variables $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ se las llama ligadas en el signo de variable, y cualesquiera otras variables que aparezcan en $(\lambda\, \mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n)(\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n))$ estarán libres o ligadas de acuerdo con el modo en que aparezcan en $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$. Se dice que $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ es el campo de afección del signo $(\lambda\, \mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n)$.

En lo que respecta a las *fórmulas elementales* ha de observarse que en las fórmulas elementales 3) pueden aparecer también, en lugar de las variables $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$, signos de predicados de los tipos correspondientes. Se añaden además las siguientes fórmulas elementales:

4) Sean $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ una fórmula que contenga las variables $\mathfrak{U}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{U}_n$ $(n \geqq 1)$, de tipos $a_1, \ldots, a_n$, en forma libre, pero que no encierre ninguna otra variable libre. Podemos introducir ahora un signo de predicado, $\mathfrak{B}$, que hasta entonces no hubiera aparecido —que por regla general será una letra griega mayúscula, una combinación de una letra latina mayúscula y de letras latinas minúsculas situadas detrás de ella o incluso, en determinadas ocasiones, un signo especial—, y adjuntaremos la fórmula elemental

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n) \leftrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$$

[obsérvese el diferente significado de $\mathfrak{B}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ y $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$], en que $\mathfrak{B}$ es un signo de predicado de tipo $(a_1, \ldots, a_n)$.

Son ejemplos de estas fórmulas elementales,
$= (x, y) \leftrightarrow (\forall F)(F x \rightarrow F y)$ —en que F es de tipo (i) e «=» es de tipo (i, i)— y también $\mathrm{Imp}(F, G) \leftrightarrow (\forall x)(F x \rightarrow G x)$ —en que F y G son de tipo (i).

5) Tenga $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ el mismo significado que en 4), con la única salvedad de que ahora $\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n)$ podrá contener otras variables libres; entonces,

$$\{(\lambda\, \mathfrak{U}_1 \ldots \mathfrak{U}_n)\, (\mathfrak{A}(\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n))\}\, (\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n) \leftrightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n)$$

es una fórmula elemental, en la que $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n$ son variables del mismo tipo que $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$ (el carácter de fórmula de las fórmulas elementales ha de mantenerse, como es natural, en todos los casos). Las *reglas de deducción* permanecen invariables.

Como hemos dicho ya, no es necesaria la introducción de signos de predicados; pero no probaremos, como tampoco lo hicimos en los razonamientos correspondientes del capítulo III, § 12, que es posible eliminar tales signos de toda demostración.

Si preguntamos ahora si tal sistema axiomático es *completo,* la respuesta dirá lo mismo que la relativa al § 1; a saber, que no existe ningún sistema axiomático completo para el cálculo de niveles —como se sigue del trabajo de K. GÖDEL [7] mencionado más arriba.

Al comparar el sistema de axiomas que antecede con el que habíamos establecido en el § 1, llama la atención que falte ahora la generalización de las fórmulas β) que allí aparecían. Sea X una variable de tipo α, F de tipo $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, A de tipo $(\alpha, (\beta_1, \ldots, \beta_n))$, G de tipo $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, e $Y_1, \ldots, Y_n$ de tipos $\beta_1, \ldots, \beta_n$; entonces podemos formular la generalización del siguiente modo:

$$(\forall X)\,(\exists F)\, A(X, F) \rightarrow (\exists G)\,(\forall X)\,(\exists F)$$
$$[(\forall Y_1 \ldots Y_n)\, (F(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow G(X, Y_1, \ldots, Y_n)) \wedge A(X, F)].$$

(Estas fórmulas son válidas para tipos $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ cualesquiera.)

La razón por la que no hemos proclamado ahora estas fórmulas como fórmulas elementales reside en que en el sistema de axiomas actual pueden demostrarse [4].

Para demostrar tal cosa son esenciales las fórmulas elementales 2), lo cual no es de admirar dado que ambos tipos de fórmulas se encuentran en conexión con el axioma de elección de la teoría de conjuntos, como ya hicimos notar en el § 1. En la demostración no utilizaremos la introducción de signos de predicados.

Haremos la observación general previa de que es más fácil manejar el sistema axiomático cuando, en lugar de las fórmulas elementales 1), tomamos como fórmulas elementales todas las tautologías (es posible mostrar, del mis-

---

[4] El señor P. BERNAYS llamó ya la atención del autor acerca de ello mientras éste preparaba la segunda edición del presente libro.

mo modo que se hizo en el § 5 del capítulo III, que se pueden probar todas las tautologías en caso de que se adopten solamente las fórmulas elementales 1); por otra parte, continúan siendo válidos los demás teoremas allí demostrados, por ejemplo, el de la validez del reemplazamiento de una variable predicado).

Comencemos la demostración. Sean en adelante X, F, A, G, $Y_1, \ldots, Y$, variables de los tipos ya mencionados, sea B del mismo tipo que A, y H del mismo tipo que F; sea K una variable de tipo $((\beta_1, \ldots, \beta_n))$, y X', F', H' variables de los mismos tipos que las letras correspondientes sin prima.

Sea $\mathfrak{A}$ una designación abreviada de $(\exists X)\ \overline{\ }\ (\exists F)\ \overline{\ }\ (\overline{\ }\ A(X,F) \vee \vee\ \overline{\ }\ B(X,F))$,
$\mathfrak{B}$ de $(\exists X F H)\ \overline{\ }\ [\overline{\ }\ B(X,F) \vee\ \overline{\ }\ B(X,H) \vee (\forall K)(\overline{\ }\ K(F) \vee K(H))]$,
y $\mathfrak{C}$ una para $(\exists G)(\forall X)(\exists F)[(\forall Y_1, \ldots, Y_n)(F(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \leftrightarrow G(X, Y_1, \ldots, Y_n)) \wedge A(X,F)]$.
Represéntese además, con $\mathfrak{D}$, $(\exists F)[(\forall Y_1 \ldots Y_n)(F(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \leftrightarrow (\exists H)(B(X',H) \wedge H(Y_1, \ldots, Y_n))) \wedge A(X',F)]$,
con $\mathfrak{E}$, $(\exists H)(B(X',H) \wedge H(Y_1, \ldots, Y_n))$,
con $\mathfrak{B}_1$, $(\exists F H)\ \overline{\ }\ [\overline{\ }\ B(X',F) \vee\ \overline{\ }\ B(X',H) \vee (\forall K)(\overline{\ }\ K(F) \vee K(H))]$,
con $\mathfrak{B}_2$, $(\exists H)\ \overline{\ }\ [\overline{\ }\ B(X',F') \vee\ \overline{\ }\ B(X',H) \vee (\forall K)(\overline{\ }\ K(F') \vee K(H))]$,
con $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \vee\ \overline{\ }\ A(X',F') \vee\ \overline{\ }\ B(X',F')$,
con $\mathfrak{H}$, $(\exists K)\ \overline{\ }\ (\overline{\ }\ K(F') \vee K(H'))$, que también podemos escribir $(\exists K)(K(F') \wedge\ \overline{\ }\ K(H'))$
y con $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2$.

Con objeto de seguir mejor la demostración numeraremos sus fórmulas. En primer lugar,

$$\mathfrak{K} \vee \mathfrak{H} \vee ((\overline{\ }\ B(X',F') \vee\ \overline{\ }\ F'(Y_1, \ldots, Y_n)) \wedge B(X',H') \wedge \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee\ \overline{\ }\ (B(X',H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n) \quad (1)$$

es una tautología, fácilmente demostrable a partir de fórmulas elementales 1) por medio de las reglas (I) y (II). Si se aplica ahora la regla (IV), el miembro disyuntivo situado detrás de $\mathfrak{H}$ queda absorbido por ésta, con lo que se tiene

$$\mathfrak{K} \vee \mathfrak{H} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee\ \overline{\ }\ (B(X',H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n). \quad (2)$$

Además, las dos fórmulas siguientes son fórmulas elementales 1):

$$\mathfrak{K} \vee B(X',H') \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee\ \overline{\ }\ B(X',H') \vee\ \overline{\ }\ H'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n), \quad (3)$$
$$\mathfrak{K} \vee B(X',F') \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee\ \overline{\ }\ B(X',H') \vee\ \overline{\ }\ H'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n). \quad (4)$$

Si combinamos (2), (3) y (4) aplicando las reglas (I) y (II) y reemplazamos $\mathfrak{H}$ por su significado, queda:

$$\mathfrak{K} \vee [(B(X',F') \wedge B(X',H')) \wedge (\exists K)\ \overline{\ }\ (\overline{\ }\ K(F') \vee K(H'))] \vee \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee\ \overline{\ }\ (B(X',H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n). \quad (5)$$

La última fórmula puede escribirse también de este otro modo:

$$\mathfrak{R} \vee \neg [B(X', F') \wedge B(X', H') \rightarrow (\forall K)(\neg K(F') \vee K(H'))] \vee \quad (6)$$
$$\vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n).$$

Aplicamos ahora reiteradamente la regla (IV), de modo que el segundo miembro disyuntivo queda absorbido por $\mathfrak{B}_2$, éste por $\mathfrak{B}_1$, y $\mathfrak{B}_1$ por $\mathfrak{B}$, y llegamos a

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee F'(Y_1, \ldots, Y_n). \quad (7)$$

Además,

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee \mathfrak{C} \vee \quad (8)$$
$$\vee (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n))$$

es demostrable, ya que se trata de una tautología que se puede probar partiendo de fórmulas elementales 1) por medio de (I) y (II).

De (8) se obtiene, con ayuda de la regla (IV),

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee \mathfrak{C}. \quad (9)$$

De donde, juntamente con (7) y apoyándose en las reglas (I) y (II)

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (B(X', H') \wedge H'(Y_1, \ldots, Y_n)) \vee \quad (10)$$
$$\vee \neg (\neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg \mathfrak{C}),$$

y según la regla (III)

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg \mathfrak{C} \vee \neg (\neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg \mathfrak{C}). \quad (11)$$

Además, las dos fórmulas

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg \neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \quad (12)$$

y

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \mathfrak{C} \vee (B(X', F') \wedge F'(Y_1, \ldots, Y_n)) \quad (13)$$

pueden demostrarse inmediatamente a base de fórmulas elementales 1). A partir de (12) y (13), y de acuerdo con las reglas (IV), (I) y (II), se llega a

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg (\neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg \mathfrak{C}). \quad (14)$$

De (11) y (14) se obtiene, según la regla (II),

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee \neg (F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \mathfrak{C}) \vee \neg (\neg F'(Y_1, \ldots, Y_n) \vee \neg \mathfrak{C}) \quad (15)$$

o bien, escribiéndola con la abreviación «↔»,

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee (F'(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \mathfrak{E}).$$

Por otra parte, de acuerdo con las reglas (I) y (III) se halla

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee (\forall Y_1 \ldots Y_n)(F'(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \mathfrak{E}). \tag{16}$$

Además, la fórmula siguiente es una fórmula elemental 1):

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee A(X', F'). \tag{17}$$

Basándose en las reglas (I) y (II) se encuentra, a partir de (16) y (17),

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \vee [(\forall Y_1 \ldots Y_n)(F'(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \mathfrak{E}) \wedge A(X', F')]. \tag{18}$$

Asimismo se obtiene

$$\mathfrak{G} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \text{ [según la regla (IV)]}. \tag{19}$$

Si reemplazamos $\mathfrak{G}$ por su significado, tenemos

$$\mathfrak{A} \vee \neg A(X', F') \vee \neg B(X', F') \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}.$$

Llegamos también a

$$\mathfrak{A} \vee \neg\neg(\neg A(X', F') \vee \neg B(X', F')) \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \text{ [según la regla (I)]} \tag{20}$$

$$\mathfrak{A} \vee \neg(\exists F)\neg(\neg A(X', F) \vee \neg B(X', F)) \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \text{ [según la regla (III)]} \tag{21}$$

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vee \mathfrak{D} \text{ [según la regla (IV)]} \tag{22}$$

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \text{ [según las reglas (I), (III) y (IV)]} \tag{23}$$

$$\neg\neg(\neg\neg\mathfrak{A} \vee \neg\neg\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C} \text{ [por triple aplicación de (I)]} \tag{24}$$

$$\neg(\exists B)\neg(\neg\neg\mathfrak{A} \vee \neg\neg\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C} \text{ [según la regla (III)]}. \tag{25}$$

Esta última fórmula, desarrollada, es

$$(\exists B)[(\forall X)(\exists F)(A(X,F) \wedge B(X,F)) \wedge (\forall XFGH)(B(X,F) \wedge B(X,H) \rightarrow \rightarrow (\forall K)(K(F) \rightarrow K(H)))] \rightarrow (\exists G)(\forall X)(\exists F)[(\forall Y_1 \ldots Y_n)(F(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \leftrightarrow G(X, Y_1, \ldots, Y_n)) \wedge A(X, F)].$$

(Que es demostrable, como todas las fórmulas que no utilizan fórmulas elementales 2) ni 3), sin necesidad de emplear la regla de separación). Por lo demás,

$$(\forall X)(\exists F)A(X,F) \rightarrow (\exists B)[(\forall X)(\exists F)(A(X,F) \wedge B(X,F)) \wedge \wedge (\forall XFH)(B(X,F) \wedge B(X,H) \rightarrow (\forall K)(K(F) \rightarrow K(H)))]$$

es una fórmula elemental 2). También en nuestro cálculo actual ocurre que a partir de las dos fórmulas $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N} \to \mathfrak{P}$ se puede concluir $\mathfrak{M} \to \mathfrak{P}$: pues $(\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}) \to ((\mathfrak{N} \to \mathfrak{P}) \to (\mathfrak{M} \to \mathfrak{P}))$ es una tautología —y por ello demostrable—, de modo que aplicando dos veces la regla de separación se llega a $\mathfrak{M} \to \mathfrak{P}$. En el caso de la fórmula anterior obtenemos, mediante tal proceso en cadena,

$$(\forall X)(\exists F) A(X, F) \to (\exists G)(\forall X)(\exists F)[(\forall Y_1 \ldots Y_n)(F(Y_1, \ldots, Y_n) \leftrightarrow \leftrightarrow G(X, Y_1, \ldots, Y_n)) \wedge A(X, F)].$$

Pero ésta es la fórmula cuya demostrabilidad habíamos mantenido.

También puede demostrarse la *compatibilidad* del cálculo de niveles (véanse A. TARSKI [15] y G. GENTZEN [6]).

§ 6. Aplicación del cálculo de niveles

Si se quiere utilizar el cálculo de niveles para obtener las consecuencias de los axiomas de una teoría determinada, se logrará tal cosa de modo análogo a como se indicó en el § 10 del capítulo III con respecto al cálculo restringido de predicados: se añaden tales axiomas —como fórmulas elementales suplementarias— a las fórmulas elementales del cálculo de niveles, y los signos de predicados que pudieran aparecer ya en el cálculo puro de niveles se incrementan con los que intervengan en los axiomas mencionados (naturalmente, ha de indicarse el tipo de cada uno de tales signos de predicados: por lo general se tratará de signos de predicados de individuos); por tanto, tenemos ahora mayores posibilidades de expresión que teníamos en el cálculo restringido de predicados, en lo que respecta a los axiomas y sus consecuencias. Los sistemas axiomáticos para teorías científicas que antes (capítulo III, § 10) habíamos indicado pertenecer al segundo grado, tienen ahora solamente un número finito de axiomas, ya que contamos con cuantificadores para variables predicado; podemos indicar como ejemplo el sistema de axiomas para los números reales que habíamos citado en el capítulo III, § 10.

Vamos a aclarar la aplicación del cálculo de niveles con un ejemplo: tomaremos para ello un trozo de los *fundamentos de la teoría de los números reales*. Con tal objeto no introduciremos los números reales por medio de un sistema de axiomas propio, sino que los retrotraeremos a los números racionales. Consideramos, pues, los números racionales como sistema de objetos del campo de individuos. Las relaciones fundamentales aritméticas entre los números racionales, tales como suma, multiplicación, desigualdad, etc., se introducen mediante axiomas adecuados —que no daremos aquí, ya que no hemos de utilizar la forma peculiar que tengan en el trozo que estudiaremos a continuación—. Emplearemos el signo «$x < y$» para «x es menor que y»

(en que x e y son números reales); por tanto, «$<$» es un predicado de individuos de tipo (i, i).

En las Matemáticas se emplean diversos modos de retrotraer los números reales a los racionales; por ejemplo, se define un número real por medio de una sucesión fundamental cantoriana, o por medio de una fracción decimal (o dual) indefinida; para la incorporación a la lógica, el proceso de DEDEKIND es el más recomendable: de acuerdo con este autor definimos un número real como una «cortadura», es decir, como una clasificación de los números racionales en dos clases que poseen las siguientes «propiedades de cortadura»:

1. Cada una de estas clases contiene por lo menos un número racional.
2. En la primera clase no existe ningún número racional máximo.
3. Si un número racional pertenece a la primera clase, pertenecen también a ella todos los números racionales menores que aquél.

En una clasificación de tales características no necesitamos fijarnos más que en la primera clase: nos ocuparemos, pues, de un conjunto de números racionales de propiedades determinadas, que puede representarse por medio de un predicado definitorio de él.

Sean en lo que sigue P, Q, R, F, Q', P' y R' variables predicado de tipo (i), y A otra de tipo $((i))$.

Observemos ahora las siguientes tres fórmulas:

1. $\exists x P x \wedge \exists x \urcorner P x$

(«existe un número racional x con la propiedad P, y un número racional x que no tiene la propiedad P»);

2. $\forall x (P x \rightarrow \exists y (x < y \wedge P y))$

(«dado un número racional x con la propiedad P, existe otro mayor que tiene asimismo la propiedad P»);

3. $\forall x (P x \rightarrow \forall y (y < x \rightarrow P y))$

(«si el número racional x tiene la propiedad P, también tienen esta propiedad todos los números racionales menores que aquél»).

Designaremos abreviadamente con $\mathfrak{A}(P)$ la conyunción de estas tres fórmulas. Definimos ahora un predicado «Co», de tipo $((i))$, mediante la fórmula elemental «Co $(P) \leftrightarrow \mathfrak{A}(P)$»; el significado de «Co» es el siguiente: «P representa una cortadura en el campo de los números racionales», o, de un modo más breve, «P es un número real». Definimos además la relación de desigualdad entre números reales introduciendo un predicado «$\leqq_r$», de tipo $((i), (i))$, con la fórmula elemental

$$\leqq_r (P, Q) \leftrightarrow \forall x (P x \rightarrow Q x).$$

También definimos el predicado «Cr», de tipo $((\iota))$: lo hacemos con la fórmula elemental

$$\mathrm{Cr}\,(A) \leftrightarrow (\forall P)\,(A\,(P) \rightarrow \mathrm{Co}\,(P)) \wedge (\exists P)\,A\,(P).$$

Cr (A) significa: «A es un predicado que conviene únicamente a números reales, y A conviene por lo menos a un número real»; en el lenguaje de la teoría de conjuntos podemos decir: «A representa un conjunto no vacío de números reales.»

Se dice que un conjunto de números reales *está acotado superiormente* cuando existe un número real que es mayor o igual que cualquier número del conjunto: a dicho número real se le llama una *cota superior* del conjunto. Introducimos por lo tanto un predicado «Cts», de tipo $(\iota), ((\iota))$, gracias a la fórmula elemental

$$\mathrm{Cts}\,(P, A) \leftrightarrow \mathrm{Cr}\,(A) \wedge \mathrm{Co}\,(P) \wedge (\forall Q)\,(A\,(Q) \rightarrow \leqq_r (Q, P)).$$

Cts (P, A) significa: «A representa un conjunto no vacío de números reales, y el número real P es una cota superior de este conjunto.»

Ahora bien, un teorema fundamental de la teoría de los números reales es el siguiente: «si un conjunto no vacío de números reales tiene una cuota superior, también tiene límite superior —es decir, la mínima cota superior—». La formulación simbólica de este teorema reza así:

$$(\exists P)\,\mathrm{Cts}\,(P, A) \rightarrow (\exists P)\,[\mathrm{Cts}\,(P, A) \wedge (\forall R)\,(\mathrm{Cts}\,(R, A) \rightarrow \leqq_r (P, R))].$$

Vamos a probar la capacidad del cálculo de niveles en la demostración de este teorema.

La demostración matemática de la existencia del límite superior estriba, en su forma más sencilla, en formar el conjunto reunión correspondiente al conjunto considerado de números racionales. De acuerdo con las observaciones del § 3 de este capítulo, el conjunto reunión relativo a A se expresa mediante el predicado $(\exists P)\,(P\,x \wedge A\,(P))$; por tanto, nuestra demostración se encamina a mostrar que dicho predicado representa un número real que es el límite superior del conjunto A.

Por otra parte, llevaremos a cabo la demostración de suerte que los signos que hemos reseñado, Co, $\leqq_r$, Cr y Cts, no aparezcan en el proceso demostrativo como signos de predicados introducidos mediante fórmulas elementales; antes bien, Co (P) se deberá considerar únicamente como una manera abreviada de escribir aquéllo que antes habíamos llamado $\mathfrak{A}\,(P)$, $\leqq_r (P, Q)$ habrá de significar $\forall x\,(P\,x \rightarrow Q\,x)$, Cr (A) significará $(\forall P)\,(A\,(P) \rightarrow \mathrm{Co}\,(P)) \wedge$ $\wedge\,(\exists P)\,A\,(P)$, y el significado de Cts (P, A) será $\mathrm{Cr}\,(A) \wedge \mathrm{Co}\,(P) \wedge (\forall Q)\,(A\,(Q) \rightarrow$ $\rightarrow \leqq_r (Q, P)$ [pues en este caso podemos pasarnos sin la regla de separación (V)]; $Re\,(x, A)$ ha de ser una abreviación de $(\exists P)\,(P\,x \wedge A\,(P))$, y Co (Re)

significará la fórmula que se obtiene a partir de Co (*P*) cuando en ésta se sustituyen todas las fórmulas primarias $P\,\mathfrak{a}$ por $Re\,(\mathfrak{a}, A)$; análogamente han de interpretarse $\leqq_r (Re, Q)$ y otras fórmulas semejantes.

Con objeto de abreviar la demostración, utilicemos el teorema de que toda tautología es demostrable. Apliquemos también la regla deducida según la cual a partir de $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$ puede concluirse $\mathfrak{M} \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}$ —esta regla se obtiene inmediatamente de las reglas de deducción (I) y (II) cuando, según (I), se concluyen $\mathfrak{M} \vee \neg\neg\, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M} \vee \neg\neg\, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}$, y luego, según (II), se concluye $\mathfrak{M} \vee \neg (\neg\, \mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}$, o sea $\mathfrak{M} \vee (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{N}$. Por lo demás, nos toca mostrar cómo puede llevarse a cabo una demostración únicamente con las reglas (I) a (IV), aun cuando podría lograrse una demostración más breve mediante teoremas demostrados previamente del tipo de los presentados en el capítulo III, § 5.

Numeraremos las fórmulas de la demostración.

Sea $\mathfrak{B}$ una abreviación de

$$(\exists P)\,[\mathrm{Cts}\,(P, A) \wedge (\forall R)\,(\mathrm{Cts}\,(R, A) \rightarrow \leqq_r (P, R))].$$

$$\neg\, \mathrm{Cts}\,(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \mathrm{Cr}\,(A) \qquad (1)$$

es una tautología, como puede verse cuando se desarrolla Cts (P', A). En lo sucesivo, encuéntrese $\mathfrak{C}$ en lugar de $(\forall Q)\,(A\,(Q) \rightarrow \leqq_r (Q, P'))$, $\mathfrak{D}$ en lugar de $(\exists P)\ \neg\, (A\,(P) \rightarrow \mathrm{Co}\,(P))$, $\mathfrak{E}$ en el de $(\exists x P)\,(P\,x \wedge A\,(P))$ y $\mathfrak{G}$ en el de $(\exists P)\,(P\,z \wedge A\,(P))$; tenga además Co (Q') la forma $\exists x\, Q'\, x \wedge \mathfrak{H}$, que sirve para definir $\mathfrak{H}$.

$$\mathfrak{D} \vee \neg\, Q'\, z \vee \neg\, \mathfrak{H} \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E} \vee \mathfrak{G} \vee \vee\, (Q'\, z \wedge A\,(Q')) \qquad (2)$$

es una tautología.

$$\mathfrak{D} \vee \neg\, Q'\, z \vee \neg\, \mathfrak{H} \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E} \qquad (3)$$

[a partir de (2), por doble aplicación de la regla (IV)]

$$\mathfrak{D} \vee \neg\, \exists x\, Q'\, x \vee \neg\, \mathfrak{H} \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E} \qquad (4)$$

[regla (III)]

$$\mathfrak{D} \vee \neg\, (\exists x\, Q'\, x \wedge \mathfrak{H}) \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E} \qquad (5)$$

[regla (I)].

Podemos escribir también

$$\mathfrak{D} \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(Q') \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{D} \vee \neg\,\neg\, A\,(Q') \vee \neg\, A\,(Q') \vee \neg\, \mathrm{Co}\,(P') \vee \neg\, \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}\ \text{(tautología)} \qquad (6)$$

$\mathfrak{D} \vee \neg (\neg A(Q') \vee \mathrm{Co}(Q')) \vee \neg A(Q') \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$ (7)
[a partir de (6) y (5), según la regla (II)].

La cual se escribe de otro modo como sigue:

$\mathfrak{D} \vee \neg (A(Q') \rightarrow \mathrm{Co}(Q')) \vee \neg A(Q') \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$
$\mathfrak{D} \vee \neg A(Q') \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$ [regla (IV)] (8)

$\mathfrak{D} \vee \neg (\exists P) A(P) \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$ [regla (III)] (9)

$\neg\neg \mathfrak{D} \vee \neg (\exists P) A(P) \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$ [regla (I)]. (10)

Esto último puede escribirse también

$\neg (\forall P)(A(P) \rightarrow \mathrm{Co}(P)) \vee \neg (\exists P) A(P) \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$
$\neg (\mathrm{Cr}(A) \wedge \mathrm{Co}(P') \wedge \mathfrak{C}) \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{E}$ [reglas (I) y (II)]. (11)

Esta fórmula cabe escribirla asimismo

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \exists x\, Re(x, A)$. (12)

En lo que sigue, sean $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{L}$ primeramente cualesquiera, y tengan después valores especiales (suponemos en las fórmulas solamente que no contienen la variable Q').

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \exists x \neg (\neg Q'x \vee P'x) \vee \neg (\neg Q'z \vee P'z) \vee$ (13)
$\vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$

es una tautología.

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \exists x \neg (\neg Q'x \vee P'x) \vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$ (14)
[regla (IV)]

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \neg\neg \exists x \neg (\neg Q'x \vee P'x) \vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$ (15)
[regla (I)],

que puede también escribirse

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \neg \forall x (Q'x \rightarrow P'x) \vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$ o bien
$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \neg \leqq_r (Q', P') \vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$ (16)

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \neg\neg A(Q') \vee \mathfrak{L} \vee (Q'z \wedge A(Q'))$ (tautología) (17)

$\mathfrak{M} \vee P'z \vee \mathfrak{N} \vee \neg (\neg A(Q') \vee \leqq_r (Q', P')) \vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q'z \wedge A(Q'))$ (18)
[a partir de (16) y (17), según (II)].

Supongamos ahora que $\mathfrak{N}$ tiene la forma $\neg \mathfrak{H}' \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P'))$, en la que $\mathfrak{H}'$ será por ahora cualquiera, con la única condición de no contener Q'.

$\mathfrak{M} \vee P' z \vee \neg \mathfrak{H}' \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (19)
$\vee \mathfrak{L} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q'))$ [regla (III)].

$\mathfrak{M} \vee P' z \vee \neg \mathfrak{H}' \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (20)
$\vee \mathfrak{L} \vee \neg (\exists P)(P z \wedge A(P))$ [regla (III)].

Admitamos en este momento que $\mathfrak{L}$ es igual a $\mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$, en que $\mathfrak{B}$ será la fórmula mencionada al principio de la demostración.

$\mathfrak{M} \vee P' z \vee \neg \mathfrak{H}' \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (21)
$\vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$ [regla (IV)].

$\mathfrak{M} \vee \neg \exists x \neg P' x \vee \neg \mathfrak{H}' \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (22)
$\vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$ [reglas (I) y (III)].

Tomemos ahora como $\mathfrak{M}$ lo siguiente, $\neg \mathrm{Cr}(A) \vee \neg \mathfrak{K}$ —en donde $\mathfrak{K}$ ha de determinarse aún.

$\neg \mathrm{Cr}(A) \vee \neg (\mathfrak{K} \wedge \exists x \neg P' x \wedge \mathfrak{H}') \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (23)
$\vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$ [(I)]

y determinamos a partir de este momento $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{H}'$ de modo que $\mathfrak{K} \wedge \exists x \neg P' x \wedge \mathfrak{H}'$ sea igual a $\mathrm{Co}(P')$; entonces, la última fórmula dice

$\neg \mathrm{Cr}(A) \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee (\exists Q) \neg (\neg A(Q) \vee \leqq_r (Q, P')) \vee$ (24)
$\vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$

$\neg \mathrm{Cr}(A) \vee \neg \mathrm{Co}(P') \vee \neg (\forall Q)(A(Q) \to \leqq_r (Q, P')) \vee$ (25)
$\vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg (\exists P)(P x \wedge A(P))$ [regla (I)]

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \exists x \neg Re(x, A)$ [regla (I)]. (26)

En lo que sigue, $\mathfrak{A}_1$ se encontrará en lugar de $\exists x \neg (\neg Q' x \vee \exists y (x < y \wedge Q' y))$; $\mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}_3$ se determinan de suerte que $\mathfrak{A}_2 \wedge \forall x (Q' x \to \exists y (x < y \wedge Q' y)) \wedge \mathfrak{A}_3$ sea idéntico a $\mathrm{Co}(Q')$; $\mathfrak{A}_4$ significa $(\exists P) \neg (\neg A(P) \vee \mathrm{Co}(P))$ y $\mathfrak{A}_5$ se determina de forma que $(\forall P)(A(P) \to \mathrm{Co}(P)) \wedge \mathfrak{A}_5$ sea idéntica a $\mathrm{Cts}(P', A)$; $\mathfrak{B}$ tiene el mismo significado que al comienzo de la presente demostración, $\mathfrak{A}_6$ quiere decir $\exists y (z < y \wedge (\exists P)(P y \wedge A(P))$ y $\mathfrak{A}_7$ significa $(\exists P)(P u \wedge A(P))$; designamos abreviadamente $\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{A}_1$ mediante $\mathfrak{B}_1$, y $\neg \mathfrak{A}_3 \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B}$ con $\mathfrak{B}_2$.

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (z < u \wedge Q' u) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6 \vee z < u$ (27)
(tautología)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (z < u \wedge Q' u) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6 \vee \mathfrak{A}_7 \vee$ (28)
$\vee (Q' u \wedge A(Q'))$ (tautología)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (z < u \wedge Q' u) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6 \vee \mathfrak{A}_7$ [regla (IV)] (29)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (z < u \wedge Q' u) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6 \vee (z < u \wedge \mathfrak{A}_7)$ [(I) y (II)] (30)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (z < u \wedge Q' u) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (IV)] (31)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg \exists y (z < y \wedge Q' y) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (III)] (32)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg \neg Q' z \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ (tautología) (33)

$\mathfrak{B}_1 \vee \neg (\neg Q' z \vee \exists y (z < y \wedge Q' y)) \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (II)] (34)

$\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (IV)] (35)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_2 \vee \neg \forall x (Q' x \to \exists y (x < y \wedge Q' y)) \vee$ $\vee \mathfrak{B}_2 \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (I)] (36)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathrm{Co}(Q') \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (I)] (37)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \neg A(Q') \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ (tautología) (38)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg (\neg A(Q') \vee \mathrm{Co}(Q')) \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \neg Q' z \vee \neg A(Q') \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (II)] (39)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg (\neg A(Q') \vee \mathrm{Co}(Q')) \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee$ $\vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (I)] (40)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \mathfrak{A}_6$ (IV). (41)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (\exists P) (P z \wedge A(P)) \vee \mathfrak{A}_6$ [regla (III)] (42)

que, escrita de otro modo, es

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee (Re(z, A) \to \mathfrak{A}_6)$ [reglas (I) y (II)] (43)

$\mathfrak{A}_4 \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \forall x (Re(x, A) \to \exists y (x < y \wedge Re(y, A)))$ [(I) y (III)] (44)

$\neg (\forall P) (A(P) \to \mathrm{Co}(P)) \vee \neg \mathfrak{A}_5 \vee \mathfrak{B} \vee \forall x (Re(x, A) \to$ $\to \exists y (x < y \wedge Re(y, A)))$ [regla (I)] (45)

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \forall x (Re(x, A) \to \exists y (x < y \wedge Re(y, A)))$ [regla (I)]. (46)

Tenga $\mathfrak{B}$ el mismo significado que al principio de esta demostración, sea $\mathfrak{C}_1$ igual a $\exists y \neg (\neg y < z \vee Q' y)$, $\mathfrak{C}_2$ igual a $\exists x \neg (\neg Q' x \vee \forall y (\neg y < x \vee \vee Q' y))$, y determínense $\mathfrak{C}_3$ y $\mathfrak{C}_4$ de tal modo que $\mathfrak{C}_3 \wedge \forall x (\neg Q' x \vee$

$\vee\, \forall y\, (\neg\, y < x \vee Q' y)) \wedge \mathfrak{C}_4$ sea idéntica a $\mathrm{Co}(Q')$; sea $\mathfrak{C}_5$ igual a $\exists P \neg (\neg A(P) \vee \mathrm{Co}(P))$, y $\mathfrak{C}_6$ quede determinada por la condición de que $(\forall P)(\neg A(P) \vee \mathrm{Co}(P)) \wedge \mathfrak{C}_6$ sea idéntica a $\mathrm{Cts}(P', A)$; designemos además $\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \mathfrak{C}_1$ por $\mathfrak{C}_7$, y $\neg \mathfrak{C}_4 \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B}$ por $\mathfrak{C}_8$.

$$\mathfrak{C}_7 \vee \neg (\neg u < z \vee Q' u) \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg (u < z) \vee \vee (\exists P)(P u \wedge A(P)) \vee (Q' u \wedge A(Q')) \text{ (tautología)} \tag{47}$$

$$\mathfrak{C}_7 \vee \neg (\neg u < z \vee Q' u) \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg (u < z) \vee (\exists P)(P u \wedge A(P)) \text{ (IV)} \tag{48}$$

$$\mathfrak{C}_7 \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee \exists P (P u \wedge A(P)) \text{ (IV)} \tag{49}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \neg (\forall y)(\neg y < z \vee (Q' y)) \vee \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (I)} \tag{50}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \neg \neg Q' z \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (tautología)} \tag{51}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \neg (\neg Q' z \vee \forall y (\neg y < z \vee Q' y)) \vee \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (II)} \tag{52}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \mathfrak{C}_2 \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (IV)} \tag{53}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_3 \vee \neg (\forall x)(\neg Q' x \vee \forall y (\neg y < x \vee Q' y)) \vee \vee \mathfrak{C}_8 \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (I)} \tag{54}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathrm{Co}(Q') \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (I)} \tag{55}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \neg A(Q') \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (tautología)} \tag{56}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg (\neg A(Q') \vee \mathrm{Co}(Q')) \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (II)} \tag{57}$$

$$\mathfrak{C}_5 \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (IV)} \tag{58}$$

$$\neg (\forall P)(\neg A(P) \vee \mathrm{Co}(P)) \vee \neg \mathfrak{C}_6 \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (I)} \tag{59}$$

$$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg (Q' z \wedge A(Q')) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (I)} \tag{60}$$

$$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg (\exists P)(P z \wedge A(P)) \vee \neg u < z \vee Re(u, A) \text{ (III)} \tag{61}$$

$$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg Re(z, A) \vee \forall y (\neg y < z \vee Re(y, A)) \text{ (I, III)} \tag{62}$$

$$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \forall x (Re(x, A) \to \forall y (y < x \to Re(y, A))) \text{ (I, III)} \tag{63}$$

Tenga $\mathfrak{B}$ la misma significación que antes.

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg A(Q') \vee \neg Q'z \vee Re(z, A) \vee$ (64)
$\vee (Q'z \wedge A(Q'))$ (tautología)

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg A(Q') \vee \neg Q'z \vee Re(z, A)$ (IV) (65)

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee \neg A(Q') \vee \forall x (Q'x \to Re(x, A))$ (I, III) (66)

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee (\forall Q)(A(Q) \to \leqq_r (Q, Re))$ (I, III) (67)

$\mathfrak{B}$ tenga de nuevo igual significado; encuéntrese $\mathfrak{D}_1$ en lugar de $\neg \mathrm{Cts}(P, A) \vee \vee \mathfrak{B}$, esté $\mathfrak{D}_2$ determinada por ser $\mathfrak{D}_2 \wedge (\forall P)(\neg A(P) \vee \leqq_r (P, Q'))$ igual a $\mathrm{Cts}(Q', A)$, sea $\mathfrak{D}_3$ igual a $(\exists R) \neg (\neg A(R) \vee \leqq_r (R, Q'))$ y $\mathfrak{D}_4$ igual a $\exists x \neg (\neg R'x \vee Q'x)$.

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \mathfrak{D}_4 \vee \neg (\neg R'z \vee Q'z) \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (68)
(tautología)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \mathfrak{D}_4 \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (IV) (69)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \neg \leqq_r (R', Q') \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (I, III) (70)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \neg \neg A(R') \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (tautología) (71)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \neg (\neg A(R') \vee \leqq_r (R', Q')) \vee \neg (R'z \wedge$ (72)
$\wedge A(R')) \vee Q'z$ (II)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{D}_3 \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (IV) (73)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathfrak{D}_2 \vee \neg (\forall P)(\neg A(P) \vee \leqq_r (P, Q')) \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (I) (74)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathrm{Cts}(Q', A) \vee \neg (R'z \wedge A(R')) \vee Q'z$ (I) (75)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathrm{Cts}(Q', A) \vee \neg (\exists P)(Pz \wedge A(P)) \vee Q'z$ (III) (76)

$\mathfrak{D}_1 \vee \neg \mathrm{Cts}(Q', A) \vee \leqq_r (Re, Q')$ (I, III) (77)

$\mathfrak{D}_1 \vee (\forall R)(\mathrm{Cts}(R, A) \to \leqq_r (Re, R))$ (I, III) (78)

esta última fórmula puede escribirse también

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee (\forall R)(\mathrm{Cts}(R, A) \to \leqq_r (Re, R))$. (79)

A partir de las fórmulas (1), (12), (26), (46), (63), (67) y (79), según las reglas (I) y (II) y teniendo en cuenta las definiciones de $\mathrm{Co}(Re)$ y $\mathrm{Cts}(Re, A)$, obtenemos la fórmula

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B} \vee (\mathrm{Cts}(Re, A) \wedge (\forall R)(\mathrm{Cts}(R, A) \to \leqq_r (Re, R)))$. (80)

$\neg \mathrm{Cts}(P', A) \vee \mathfrak{B}$ (IV) (81)

$\neg (\exists P) \mathrm{Cts}(P, A) \vee \mathfrak{B}$ (III). (82)

Pero ésta es la fórmula buscada,

$$(\exists P)\,\mathrm{Cts}\,(P, A) \rightarrow (\exists P)\,(\mathrm{Cts}\,(P, A) \wedge (\forall R)\,(\mathrm{Cts}\,(R, A) \rightarrow \leqq_r (P, R))).$$

Nuestra demostración indica que esta última fórmula es una *identidad lógica* —con este nombre hemos de entender una fórmula demostrable en el cálculo puro de niveles, sin axiomas suplementarios, o una fórmula que procede de una de la clase anterior por sustitución de variables predicado por signos de predicados.

BIBLIOGRAFIA

No podemos dar aquí una lista completa de la amplísima literatura existente acerca de la lógica matemática; remitimos para ello a la obra de A. CHURCH, A Bibliography of Symbolic Logic [J. Symb. Logic 1, n.° 4, 121-218 (1936)], que contiene un índice ordenado cronológicamente de la literatura hasta el año 1935, y que se ha completado en «Additions and Corrections» [J. Symb. Logic 3, n.° 4, 178-212 (1938)]; la publicada a partir de 1935 se encuentra progresivamente reseñada en la Sección de referencias del Journal of Symbolic Logic.

Hay una serie de buenos libros acerca de la lógica matemática; mencionamos a continuación solamente unos pocos, que recomendamos para completar la formación del lector, ya que o bien tratan la materia de un modo diferente que nosotros o abarcan un campo que excede el de nuestros Elementos.

Mencionaremos los siguientes libros en idioma alemán:

CARNAP, R.: Einführung in die symbolische Logik. Wien 1954.

HILBERT, D., y P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik I-II. Berlin 1934-1939.

SCHOLZ, H.: Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Logic. I y II Partes. Münster 1950-51.

TARSKI, A.: Einführung in die mathematische Logik und die Methodologie der Mathematik. Wien 1937.

En punto a libros en inglés, citaremos

CHURCH, A.: Introduction to Mathematical Logic. Princeton 1956.

KLEENE, S. C.: Introduction to Metamathematics. Amsterdam 1952.

QUINE, W. V.: Mathematical Logic, 2.ª ed. Cambridge (Mass.), 1951.

Llamaremos la atención además, para estudios especiales, sobre la serie de monografías que vienen apareciendo desde 1951 en la colección «Studies in logic and the foundations of mathematics» (North Holland Publishing Company, Amsterdam) [1].

---

[1] De la escasísima literatura en español sobre estos temas destacaremos las siguientes obras (meramente introductorias):

FERRATER, J.-LEBLANC, H.: Lógica matemática. *F. de Cult. Econ.* México 1955.

FERRATER, J.: Diccionario de Filosofía, 4.ª ed. *Ed. Sudamericana.* B. Aires 1958.

El índice bibliográfico situado a continuación y dividido por capítulos contiene exclusivamente trabajos a los que se hace referencia en el texto.

Capítulo I

[1] Ackermann, W.: Begründung einer strengen Implikation. J. Symb. Logic. *21*, Nr. 2 (1956).
[2] Bernays, P.: Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica. Math. Z. *25* (1926).
[3] Curry, H. B.: A theory of formal deducibility. Notre Dame mathematical lectures, Nr. 6. Notre Dame 1950.

García Bacca, J. D.: Introducción a la lógica moderna. *Labor*. Barcelona 1936.
Granell, M.: Lógica. *Rev. de Occidente*. Madrid 1949.
Quine, W.: El sentido de la nueva lógica. *Nueva Visión*. B. Aires 1958 (*ed. orig.* 1944).
Stahl, G.: Introducción a la lógica simbólica. *Ed. de la Univ. de Chile*. Santiago de Ch. 1956.
Tarski, A.: Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas. *Espasa-Calpe*. B. Aires 1951 (versión castellana del libro citado en la bibliografía alemana).

También se han publicado en nuestro idioma unas cuantas obras de divulgación que tratan más o menos incidentalmente de la lógica simbólica; las principales son (entre ellos hemos incluido los libros de Brunschwicg y Wittgenstein, no divulgatorios, sino fundamentales):

Bocheński, I. M.: Los métodos actuales del pensamiento, 2.ª ed. *Rialp*. Madrid 1959 (*ed. orig.* 1954).
Brandt, W. - Deutschbein, M.: Introducción a la filosofía matemática. *Rev. de Occ.* Madrid 1930.
Brunschwicg, L.: Las etapas de la filosofía matemática. *Lautaro*. Buenos Aires 1945 (*ed. orig.* 1929).
Bunge, M. (*compilador*): Antología semántica. *Nueva Visión*. Buenos Aires 1960.
Davenport, C. K.: El papel de los métodos gráficos en la historia de la lógica. *Univ. Nac. de México*, México 1957 (*ed. orig.* 1956).
Piaget, J., Mays, W. y Beth, W.: Psicología, lógica y comunicación. *Nueva Visión*, Buenos Aires 1959 (*ed. orig.* 1957).
Poincaré, H.: Ciencia y método. *Espasa-Calpe*. Madrid 1944 (*ed. orig.* 1909).
— Ultimos pensamientos. *Espasa-Calpe*. Madrid 1946 (*ed. orig.* 1913).
Russell, B.: Los principios de la matemática. *Espasa-Calpe*. Buenos Aires 1948. (*ed. orig.* 1903, *revisada en* 1938).
— Introducción a la filosofía matemática. *Losada*. Buenos Aires 1945 (*ed. orig.* 1919).
Toranzos, F.: Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática. 2.ª ed. *Espasa-Calpe*. Buenos Aires 1949.
Weinberg, J. R.: Examen del positivismo lógico. *Aguilar*. Madrid 1959 (*ed. orig.* 1936).
Wittgenstein, L.: Tractatus Logico-philosophicus. *Rev. de Occ.* Madrid 1957 (*ed. orig. bilingüe* 1922).

Pueden consultarse también los siguientes trabajos aparecidos en revistas españolas, en su mayoría de divulgación:

Badillo, M. de la C.: Fundamentos en relación con lógica simbólica polivalente. Gaceta Mat., T. VII, *1-2* (1955).
— Aplicación de la lógica polivalente a la teoría de números. Gaceta Mat., T. X, *3-4* (1958).
Barinaga, J.: Sobre la construcción lógica de la equivalencia. Euclides, *2* (1941).
— Matemática y Metalógica. Euclides, *23* (1943).
— Las paradojas semánticas y sus relaciones con las matemáticas. Euclides, *35* (1944).

[4] FREGE, G.: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.
[5] — Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Reimpresión, Breslau, 1934.
[6] — Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. Jena 1893.
[7] GENTZEN, G.: Untersuchungen über das logische Schliessen. I y II. Math. Z. *39* (1934).
[8] HEYTING, A.: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. S.-B. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1930.
[9] — Intuitionism. An introduction. Amsterdam 1956.

BERNAYS, P.: Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung. Theoria, *7-8* (1954).
BUENO, G.: Una nueva exposición de la silogística. Rev. de Filos., *39* (1951).
CRESPO, R.: Sobre el álgebra de la lógica de Schroeder. Rev. Mat. Hisp.-Am., 4.ª serie, T. XI, *5-6* (1951).
CUESTA, N.: Modelos deductivos ordinales. Rev. Mat. Hisp.-Am., 4.ª serie, T. XIII, *4* (1953).
— Estructuras deductivas. Rev. Mat. Hisp.-Am., 4.ª serie. T. XIV, *3* (1954).
CHRISTIAN, C.: Zwei Theoreme über die Einerklasse. Theoria, *9* (1955).
— Die Elimination des Unendlichkeitstheorems in einem intensionalem Kalkül. Theoria, *9* (1955).
— A proof of the inconsistency of Quine's system «Mathematical Logic (1951)». Theoria, *9* (1955).
DEL BUSTO, E.: La probabilidad y la lógica inductiva en Carnap. Theoria, *9* (1955).
DÍEZ BLANCO, A.: Nuevas lógicas. Rev. de Filos., *36* (1951).
DRUDIS, R.: Repertorio bibliográfico de Filosofía de la Ciencia: la Filosofía Neopositivista. Theoria, *9* (1955).
FÉVRIER-DESTOUCHES, P.: Application des logiques modales en physique quantique. Theoria, *7-8* (1954).
FEYS, R.: Nature et possibilités de la logique formalisée. Theoria, *3-4* (1952).
— Bibliografía de lógica matemática correspondiente al período de 1946-1948. Rev. de Filos., *41* (1952).
— Les logiques modales (Thèmes de discussion). Theoria, *7-8* (1954).
FUENTES MIRAS, J.: El problema de la Decisión en el Cálculo de Enunciados. Euclides, *34* (1943).
— La «verdad deductiva» según Tarski. Gaceta Mat., T. VI, *5-6* (1954).
SÁNCHEZ MAZAS, M.: Notas preliminares para la fundamentación de una lógica matemática comprehensiva. Theoria, *1* (1952).
— Breve esquema de las principales ideas lógicas de Leibniz. Theoria, *5-6* (1953).
— La teoría del silogismo desarrollada en forma de álgebra. Theoria, *7-8* (1954).
— Las recientes investigaciones de historia de la Lógica antigua: La escuela de Lukasiewicz. Theoria, *7-8* (1954).
— Un intento de expresión matemática de la lógica modal clásica: El grupo de matrices modales y el sistema de las coordenadas modales. Theoria, *7-8* (1954).
— Formalización de la lógica, según la perspectiva de la comprehensión. Theoria, *9* (1955).
Sem. de Lóg. Mat.: El concepto de teoría. Theoria, *7-8* (1954).
SKOLEM, TH.: Sobre la naturaleza del razonamiento matemático. Gaceta Mat., T. IV, *4* (1952).
— Consideraciones sobre los fundamentos de la matemática. Rev. Mat. Hisp.-Am., 4.ª serie, T. XII, *3* (1952), y T. XIII, *3* (1953).
ZAHLEN, J.-P.: Sur une application de la logistique á un problème de Calcul de Probabilités. Euclides, *110* (1950).

En la revista Theoria (1952-1955) aparecieron también diversas reseñas y notas bibliográficas de interés. (*N. del T.*)

[10] HILBERT, D., y P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, T. I. Berlín 1934.
[11] — — Grundlagen der Mathematik, T. II. Berlín 1939.
[12] JOHANNSON, I.: Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. Comp. Math. *4*, Cuad. 1 (1936).
[13] KLEENE, S. C.: Introduction to metamathematics. Amsterdam 1952.
[14] LEWIS, C. I.: A survey of symbolic logic. Univ. of California Press. 1918.
[15] — y C. H. LANGFORD: Symbolic Logic. New York 1932. Reimpresión 1951.
[16] LUKASIEWICZ, J., y A. TARSKI: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. C. R. Soc. Sci. Varsovie *23*, Kl. III, Varsovia 1930.
[17] NICOD, J. G. P.: A reduction in the number of the primitive propositions of logic. Proc. Cambr. Phil. Soc. *19* (1917). Véase W. V. QUINE. A note on Nicod's postulate. Mind 41.
[18] SCHÜTTE, K.: Schlussweisenkalkül der Prädikatenlogik. Math. Ann. *122* (1950).
[19] SHEFFER, H. M.: A set of five independent postulates for Boolean algebras, with application to logical constants. Trans. Amer. math. Soc. *14* (1915).
[20] SLUPECKI, J.: Über die Regeln des Aussagenkalküls. Studia log. *1* (1953).
[21] WHITEHEAD, A. N., y B. RUSSELL: Principia Mathematica. 1.ª ed. 1910-13, 2.ª ed. 1925-27. Cambridge (Inglaterra).

CAPÍTULO II

[1] BEHMANN, H.: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. *86* (1922).
[2] BOOLE, G.: Laws of thought (1854). Reimpresión Nueva York 1954.
[3] LÖWENHEIM, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann. *76* (1915).
[4] SCHRÖDER, E.: Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 tomos. Leipzig 1890-95.
[5] SKOLEM, TH.: Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vidensk. Skr., Mat.-Nat. Kl. Nr. 3, Cristiania 1919.

CAPÍTULO III

[1] ACKERMANN, W.: Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. *112* (1936).
[2] — Solvable cases of the decision problem. Amsterdam 1954.
[3] BEHMANN, H.: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. *86* (1922).
[4] BERNAYS, P., y M. SCHÖNFINKEL: Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. *99* (1928).
[5] CHURCH, A.: A note on the Entscheidungsproblem; Correction to a note on the Entscheidungsproblem. J. Symb. Logic *1* (1936).

[6] GENTZEN, G.: Untersuchungen über das logische Schliessen. I y II. Math. Z. *39* (1934).
[7] GÖDEL, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Phys. *37* (1930).
[8] — Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. Mh. Math. Phys. *40* (1933).
[9] HENKIN, L.: The completeness of the first-order functional calculus. J. Symb. Logic *14* (1949).
[10] HERBRAND, J.: Recherches sur le théorie de la démonstration. Soc. Sci. Lettr. Varsovie, Kl. III, Nr. 33, Varsovia 1930.
[11] HILBERT, D., y P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, T. I, Berlín 1934.
[12] — — Grundlagen der Mathematik, T. II, Berlín 1939.
[13] KALMAR, L.: Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten. Math. Ann. *108* (1932).
[14] — Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen binären Funktionsvariablen. Comp. Math. *4* (1936).
[15] — On the reduction of the decision problem. First paper, Ackermann prefix, a single binary predicate. J. Symb. Logic *4* (1939).
[16] — Contributions to the reduction theory of the decision problem. Acta math. Acad. Sci. Hung. *1*, 73 (1950).
[17] — y J. SURANYI: On the reduction of the decision problem. Second paper, Gödel prefix, a single binary predicate. J. Symb. Logic *12* (1947).
[18] — — On the decision problem. Third paper, Pepis prefix, a single binary predicate. J. Symb. Logic *15* (1950).
[19] KLEENE, S. C.: Introduction to metamathematics. Amsterdam 1952.
[20] LÖWENHEIM, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann. *76* (1915).
[21] PEPIS, J.: Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Fund. Math. *30* (1938).
[22] SCHMIDT, ARNOLD: Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik. Math. Ann. *123* (1951).
[23] SCHRÖTER, K.: Theorie des bestimmten Artikels. Z. math. Logik u. Grundlagen Math. *2* (1956).
[24] SCHÜTTE, K.: Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. *109* (1934).
[25] — Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln. Math. Ann. *110* (1934).
[26] — Schlussweisenkalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. *122* (1950).
[27] — Die Eliminierbarkeit des bestimmten Artikels in Kodifikaten der Analysis. Math. Ann. *123* (1951).
[28] — Ein System des verknüpfenden Schliessens. Arch. math. Logik u. Grundlagenforsch. *2*, 2-4 (1956).
[29] SKOLEM, TH.: Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls and über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vidensk. Skr., Mat.-nat. Kl., Nr. 3, Cristiania 1919.

[30] — Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen. Vid. Skr. Nr. 4, Cristiania 1920.
[31] SURANYI, J.: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls. Mat. Fis. Lapok *50* (1943).
[32] — Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only. Proc. 10th. int. Congr. Phil. I, Amsterdam 1949.

CAPÍTULO IV

[1] ACKERMANN, W.: Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. *110* (1934).
[2] — Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik. Math. Ann. *111* (1935).
[3] BEHMANN, H.: Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. *86* (1922).
[4] CHURCH, A.: A formulation of the simple theory of types. J. Symb. Logic *5* (1940).
[5] FREGE, G.: Grundgesetze der Arithmetik. Jena 1893.
[6] GENTZEN, G.: Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik. Math. Z. *41* (1930).
[7] GÖDEL, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Mh. Math. Phys. *38* (1931).
[8] HILBERT, D., y P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, T. II. Berlín 1939.
[9] LORENZEN, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[10] LÖWENHEIM, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül. Math. Ann. *76* (1915).
[11] RUSSELL, B.: Einführung in die mathematische Philosophie. München 1922.
[12] SCHRÖDER, E.: Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik) I-III. Leipzig 1890-95.
[13] SKOLEM, TH.: Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. Vidensk. Skr. Mat.-Nat. Kl., Nr. 3, Cristiania 1919.
[14] TARSKI, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philos. *1* (1935).
[15] — Einige Betrachtungen über die Begriffe der w-Widerspruchsfreiheit und w-Vollständigkeit. Mh. Math. Phys. *40* (1933).
[16] WHITEHEAD, A. N., y B. RUSSELL: Principia Mathematica, 1.ª ed. 1910-13, 2.ª ed. 1925-27. Cambridge (Inglaterra).
[17] ZYKOV, A. A.: The spectrum problem in the extended predicate calculus. Amer. math. Soc. Transl. 2.ª serie, 3 (1956). [Publicado originalmente en ruso en Izvestia Akad. Nauk SSSR, ser. mat. *17* (1953).]

INDICE DE AUTORES Y MATERIAS

ACKERMANN, W., 50, 143, 149, 164.
Alternación, 14.
Aquel, el que, 150.
Asociación, 77.
Axiomas de extensionalidad, 175, 187.
Axiomática de teorías científicas, 129.

BEHMANN, H., 70, 143, 164.
BERNAYS, P., 12, 36, 47, 99, 149, 156, 157, 183, 205.
Bicondicional, 15 *n.*
Bien ordenado, conjunto, 176.
BOOLE, G. I., 12, 70.
BRENTANO, L., 24.
BROUWER, L. E. I., 41.

Cálculo de niveles, 183.
— de predicados con inclusión de la identidad, 121.
— de proposiciones, 13.
— — intuicionista, 41.
— mínimo, 43, 46.
— generalizado de predicados, 161.
— múltiple de predicados, 135.
— restringido de predicados, 79.
Campo de afección de un cuantificador, 88.
— de individuos, 58, 60, 85.
CARROLL, L., 76.
CHURCH, A., 138, 185, 205.
Clase complementaria, 57.
— nula, 57.
— parcial, 58.
— universal, 58.
— vacía, 57.
Coimplicación, 15.
Compatibilidad de sistemas axiomáticos para teorías científicas, 132.
— del cálculo de niveles, 195.
— del cálculo de predicados, 115.
Completitud del cálculo de niveles, 191.
— del cálculo de predicados con inclusión de la identidad, 124.
— del cálculo generalizado de predicados (con cuantificadores de predicados), 168.
— del cálculo proposicional, 39.
— del cálculo restringido de predicados, 116.
Concepto de grupo, 153.
Concluir natural, 45.
Condicional, 15 *n.*
Conexiones de clases, 57.
— lógicas fundamentales, 13.
Conjunto de todos los conjuntos parciales, 176.
— parcial, 176.
— reunión, 175, 176.
Contradicción, 21.
Conyunción, 14.
Cortadura de Dedekind, 196.
Cuantificador de existencia, 84.
— universal, 83.
Cumplibilidad, el problema de la, 33, 69, 90.
CURRY, H. B., 47.

Decibilidad, el problema de la, 69, 138.
DEDEKIND, R., 196.
Deducción de consecuencias a partir de axiomas dados en el cálculo de niveles, 195.
— — en el cálculo de predicados, 129, 130.
— — en el cálculo proposicional, 40.
Disyunción, 14.
Dualidad, principio de, 28, 109.

Eliminación, el problema de la, 163.
Equinumeridad de predicados, 172.
Equivalencia de predicados, 171.
Equivalencia en la teoría de conjuntos, 176.
Equivalencias del cálculo de predicados, 90.
— del cálculo proposicional, 21, 22.
Expresión opuesta de otra dada, 108.

Expresiones cerradas, 170.
— del cálculo de clases, 60.
— del cálculo de niveles, 185.
— del cálculo generalizado de predicados (con cuantificadores de predicados), 162.
— del cálculo proposicional, 19.
— del cálculo restringido de predicados, 89.

Forma normal conyuntiva, 25.
— — conyuntiva óptima, 32.
— — disyuntiva, 25.
— — disyuntiva óptima, 32.
— — prenexuada, 111.
— — skolemiana, 113.
— proposicional, 19.
Fórmula inferior de una deducción, 37.
— superior de una deducción, 37.
Fórmulas unitarias, 150.
— primarias, 88.
FREGE, G., 12, 24, 36, 80, 171, 173.
Función proposicional, 19 *n.*
Funciones, introducción de, 150.
— veritativas, 16, 17.

GENTZEN, G., 36, 47, 99, 195.
GÖDEL, K., 121, 138, 143, 149, 168, 183, 191.

HENKIN, L., 121.
HERBRANDT, J., 121.
HEYTING, A., 41, 47.
HILBERT, D., 12, 36, 47, 99, 133, 156, 183, 205.

Idempotencia de la conyunción y la disyunción, 23.
Identidad de clases, 59.
—, definición de, 163.
— lógica, 204.
—, predicado de la, 121, 122.
Implicación, 14.
— de predicados, 171.
— estricta, 48, 49.
Inclusión de clases, 58.
Individuos, 81.
Independencia de los axiomas del cálculo de predicados, 116.
Inducción completa, 136, 137.
Intersección de clases o de conjuntos, 57, 176.
Intolerancia de predicados, 171.

JEVONS, W. S., 12.

KALMAR, L., 143, 149.
KLEENE, S. C., 47, 138, 205.

LEIBNIZ, G. W., 12.
Letras góticas, empleo de, 19.
LEWIS, C. I., 49.
Ley asociativa de la conyunción y la disyunción, 22.
— conmutativa de la conyunción y disyunción, 22.
— distributiva del cálculo proposicional, 22.
Lógica aristotélica, 70.
— positiva, 47.
— tradicional, 70.
LORENZEN, P., 184.
LÖWENHEIM, L., 70, 121, 142, 143, 164.
LUKASIEWICZ, J., 36.
LULIO, RAIMUNDO, 12 *n.*

Matriz, 111.
Mentiroso, paradoja del, 178.
Metalenguaje, 182.
Metamatemática, 183.
Modus ponens, 41 *n.*, 103 *n.*
Modus tollens, 23 *n.*
MORGAN, A. DE, 12.
Multiplicidad de los enlaces proposicionales, 30.

Negación, 13, 14.
NICOD, J. G. P., 36.
Número, tratamiento lógico del concepto de, 171.

O... o, 14, 16.
Ordenado, conjunto, 176.

Paradojas lógicas, 176, 177.
— semánticas, 182, 183.
PEANO, G., 12, 80, 136.
PEIRCE, C. S., 12.
PEPIS, J., 143.
POST, E., 138.
Predicados, 81.
— de predicados, 170.
— monádicos y diádicos, 82.
Prefijo, 111.
Principia mathematica, 12, 183, 184.

QUINE, W. V., 205.

RAMSEY, F. P., 184.
Reemplazamiento de variables individuales, 99.
— de variables predicado, 83, 186.
— de variables proposicionales, 20, 105.
Reflexividad, 170.
Regla de cambio de denominación de las variables ligadas, 99.
— de separación, 40, 103, 106, 130.
— de sustitución, 107.
Reunión de clases, 57.
— de conjuntos, 175, 176.
RUSSELL, B., 10, 12, 24, 36, 173, 178, 183, 184.
Russelliana, paradoja, 178.

SCHMIDT, ARNOLD, 136.
SCHOLZ, H., 205.
SCHÖNFINKEL, M., 149.
SCHRÖDER, E., 12, 70, 164.
SCHRÖTER, K., 156.
SCHÜTTE, K., 37, 99, 121, 156.
SHEFFER, H. M., 24.
Shefferiana, conexión barra, 24, 25, 36.
Signo de existencia, 84.
— de predicado, 190.
— universal, 83.
Simetría, 170.
Sistema axiomático del cálculo de predicados con inclusión de la identidad, 123.
— — del cálculo de niveles, 186, 187.
— — del cálculo proposicional, 37.
— — del cálculo generalizado de predicados (con cuantificadores de predicados), 164, 165.
— — del cálculo restringido de predicados, 91, 92.
— — para la teoría de conjuntos, 157.
— — para los números naturales, 136, 137.
Sistemas axiomáticos de primer grado, 136.
— — de segundo grado, 136.
SKOLEM, TH., 70, 112, 121, 143, 164.
SLUPECKI, J., 36.
Subclase, 58.
SURANYI, J., 143.
Superfluidad de conexiones fundamentales, 23.

Tablas de evaluación, 17.
TARSKI, A., 36, 183, 195, 205.
Tautología, 21.
Teorema de Gödel, 168.
— de Löwenheim-Skolem, 121.
— hauberiano, 76.
Teoremas de reducción para el problema de la decidibilidad, 142.
Teoría de conjuntos, teoremas fundamentales de la, 173.
— de los números reales, 195.
— de los tipos ramificada, 184.
— de los tipos simple, 184.
Tipo de un predicado, 183, 184.
Transitividad, 170.
TURING, A. M., 138.

Universo del discurso, 58 *n.*

Validez de expresiones en un campo de individuos, 60, 89.
Validez-*n*, 89.
Validez universal de expresiones en el cálculo de clases, 60.
— — de expresiones en el cálculo proposicional, 19.
— — de expresiones en el cálculo restringido de predicados, 90.
Variables de clase, 59.
— individuales, 83.
— libres, 84.
— ligadas, 84.
— predicado, 87.
— proposicionales, 19.
— semánticas, 21.
— sintácticas, 21.

WHITEHEAD, A. N., 10, 12, 24, 36, 173, 183, 184.

ZYKOV, A. A., 168, 169.

ESTA conocida obra surgió de los estudios dedicados por D. Hilbert al cálculo lógico, disciplina que quería emplear para una estructuración de las Matemáticas que pusiera de manifiesto su compatibilidad (o sea, ausencia de contradicción). En ella se describen los hechos fundamentales del cálculo lógico en cuatro capítulos, dedicados, respectivamente, al cálculo de proposiciones, al de clases y a los cálculos restringido y generalizado de predicados. Gracias a haberse seleccionado lo esencial y a la claridad de la exposición, este libro es perfectamente legible e instructivo incluso para el profano que quiera familiarizarse con sus fórmulas.

La 4.ª edición—correspondiente a nuestra 1.ª edición en castellano—se diferencia de las anteriores, ante todo, por haberse acentuado la importancia de las tablas veritativas para fundamentar el cálculo de proposiciones: dichas tablas se toman ahora como fundamento de toda la edificación de este cálculo. En cuanto al sistema axiomático para las llamadas expresiones universalmente válidas, se formula siguiendo a Gentzen, ya que al hacerlo así se hace posible decidir la validez universal. Teniendo en cuenta al lector de orientación filosófica, se tratan la lógica de proposiciones intuicionista y la llamada implicación estricta. Por lo que se refiere al cálculo de clases, se presenta detalladamente el proceso de decisión. El cálculo de predicados se estudia de modo paralelo al de proposiciones y se introduce una fundamentación axiomática de aquel cálculo con inclusión de la identidad. Para recoger los deseos de ciertos lectores de las ediciones anteriores, se explica con ejemplos cómo han de traducirse las oraciones del lenguaje ordinario en el lenguaje formalizado. Finalmente, una serie de ejercicios dan ocasión al lector de comprobar en qué medida ha entendido lo estudiado. [K. Reidemeister (Göttingen).]

En la 6.ª edición alemana—que ha servido de base a esta 2.ª edición castellana—se ha suprimido una de las demostraciones por no considerarse rigurosa, poniendo el ejemplo contradictorio equivalente.

También se han corregido erratas y extendido algunas de las fórmulas para la mejor comprensión de los problemas.